

ЗАЛА 18.
ШКАФЪ 68.
ПОЛКА 3.
№ 20

Спирит 201.

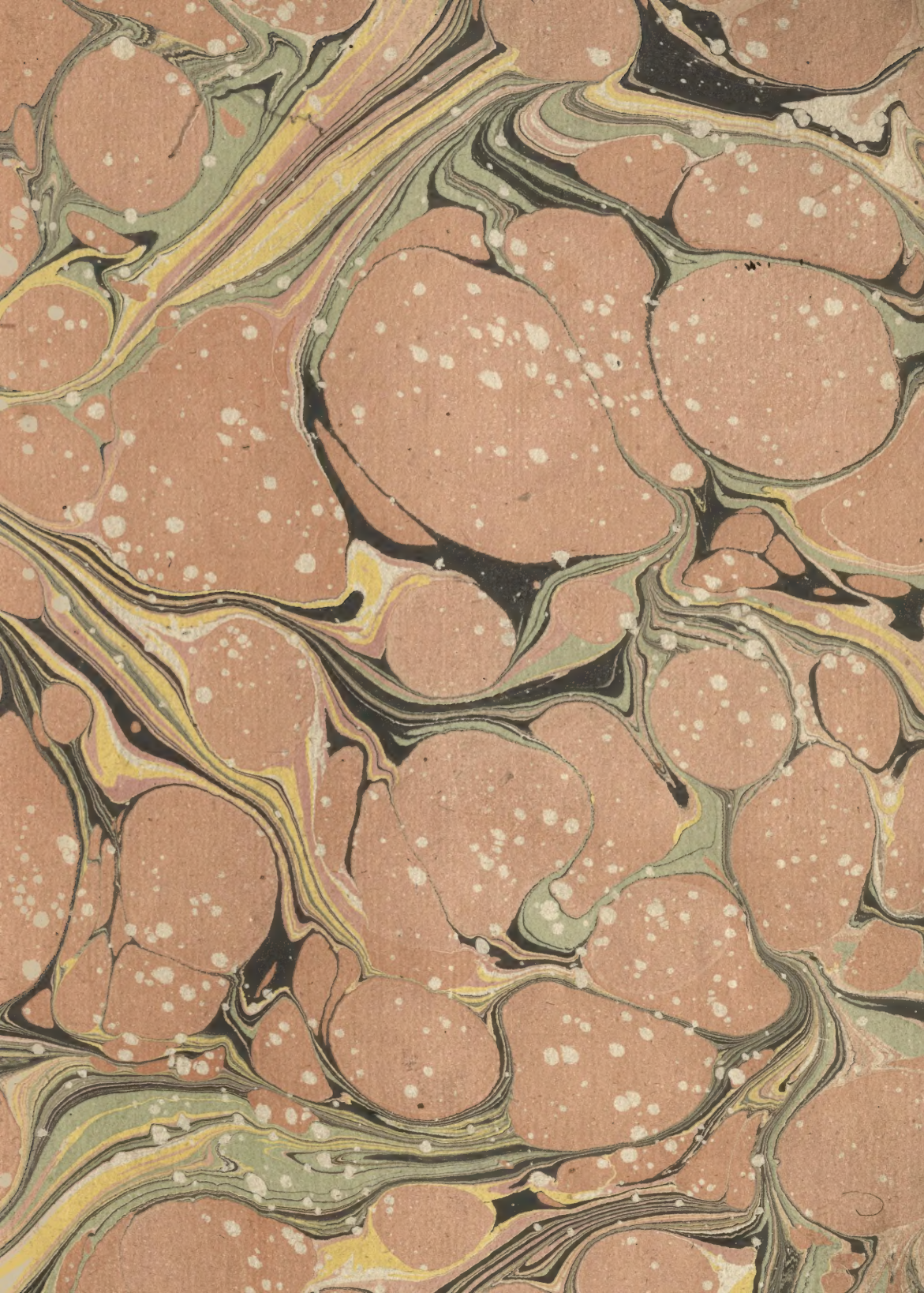
ОРСКАЯ

ЖЕНАЯ

БЛЮТЕКА

Шкафъ 12 Пол. № 101.

ЗАЛА 6.
ШКАФЪ XXVIII.
ПОЛКА 5. №



Mass 303

778

ПЛОСКАЯ и СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ

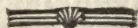
съ

АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМИ,

с о б р а н н ы м и

МИХАИЛОМЪ ГОЛОВИНЫМЪ,

Надворнымъ Совѣшникомъ, Академіи наукъ Членомъ
и учительской семинаріи Профессоромъ.



ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,

при Императорской Академіи Наукъ,
1789 года.

А. П. ПЕРВАНОВСКИЙ

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

И. Я. Гриняевская, кандидат физико-математических наук, доцент

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1887

ПЛОСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

ГЛАВА I.

О названіи и свойствѣ линій

Тригонометрическихъ.

1. Тригонометрія плоская или прямолинейная есть часть Геометріи, которая научаетъ изъ данныхъ трехъ частей прямолинейнаго треугольника, изъ коихъ хотя одной неопмѣнно должно бытьъ сторонѣ, находить прочія его части.

Черт.
1.

2. Въ тригонометріи употребляются различныя наименованія: чѣмобъ обѣ нихъ получить точное свѣденіе, то изъ центра C радіусомъ CA , которой здѣсь равенъ всегда единицѣ полагается, описавъ кругъ и просянувъ два діаметра ACB и DCE пересѣкающіе себя подѣ прямыми угломъ, возми на четверти окружности AD гдѣ ниесшь точку M , и проводи линію MC ; тогда уголъ ACM означается двоякимъ образомъ, или длиною дуги AM между его боками находящеюся, или числомъ градусовъ, кои дѣйствительно въ уголъ ACM , или дугѣ AM содержахся.

3. По томъ изъ точки M , принявъ за непремѣнное начало точку A , опусти къ діаметру AB перпендикуляръ MP , такъ же къ діаметру DE перпендикуляръ MQ , и когда уголъ ACM положишя $= \varphi$, то линія MP называется *синусъ угла φ* , которой всегда означается такъ: $MP = \sin. \varphi$; линія же MQ синусъ угла $MCQ = 90^\circ - \varphi$, которой ешь дополненіе угла φ до 90° , или до угла прямого, называется *Косинусъ угла φ* . Но поелику $MQ = PC$, то и линія PC будетъ косинусъ угла φ , которой обыкновенно такъ изображается: $PC = \cos. \varphi$. Слѣдственно $PC = MQ = \cos. \varphi = \sin. (90^\circ - \varphi)$. Или въ прямоугольномъ треугольникѣ какомъ ни ешь PMS взявъ Гипотенузу MC за радіусъ, одинъ Катетъ проливозлежащій

А

дан-



данному острому углу будетъ синусъ даннаго угла, а другой того же угла косинусъ.

4. Изъ свойства круга видно, что синусъ MP будетъ всегда меньше дуги AM , развѣ она будетъ безконечно мала, въ коемъ случаѣ синусъ будетъ равенъ самой дугѣ; и на концѣ угла, которой $= 0$, синусъ будетъ такъ же $= 0$; косинусъ же его PC будетъ равенъ тогда радіусу или единицѣ. Но когда уголъ ϕ начнетъ прибавляться, то синусъ его становится больше, а косинусъ меньше, и когда уголъ ϕ дойдетъ до 90° , тогда синусъ будетъ равенъ радіусу, которой будучи равенъ единицѣ называется *синусъ цѣлой*; слѣдовательно синусъ угла прямого $= 1$; косинусъ же совсемъ исчезаетъ, т. е. косинусъ угла прямого $= 0$.

5. При семъ надлежитъ примѣчать, что для угла $ACM = \phi$ будетъ уголъ $MCQ = 90^\circ - \phi$, коего синусъ равенъ линіи MQ ; но $MQ = PC = \cos. \phi$; слѣдственно получимъ, какъ уже въ § 2 видѣли, $\sin. (90^\circ - \phi) = \cos. \phi$; косинусъ же угла $90^\circ - \phi$ равенъ линіи QC ; но $QC = MP = \sin. \phi$; слѣдовательно выйдетъ $\cos. (90^\circ - \phi) = \sin. \phi$. Что самое произойдетъ въ формулѣ $\sin. (90^\circ - \phi) = \cos. \phi$, поставивъ $90^\circ - \phi$ вмѣсто ϕ .

6. Когда уголъ ϕ перешедъ 90° будетъ увеличиваться, то синусъ его станетъ уменьшаться, а косинусъ прибавляться, и угла $BCt = 180^\circ - \phi$ будетъ синусъ pt , а косинусъ Cr . Положивъ теперь $pt = PM = \sin. \phi$, будетъ уголъ $BCt = ACt = \phi = 180^\circ - \phi$. слѣд: $\sin. \phi = \sin. (180^\circ - \phi)$. Но поелику $rc = PC$ падаетъ въ противную сторону въ разсужденіи положенія линіи PC , или по другую сторону діаметра DCE ; то должно брать ее за отрицательную: по сему выйдетъ $\cos. (180^\circ - \phi) = -\cos. \phi$. Наконецъ, если ϕ будетъ равенъ 180° , то синусъ его совсемъ исчезнетъ, а косинусъ равенъ будетъ -1 , слѣд: получимъ $\sin. 180^\circ = 0$ и $\cos. 180^\circ = -1$.

7. Когда уголъ ϕ перейдетъ предѣлъ 180° , тогда синусъ опять станетъ увеличиваться, а косинусъ уменьшаться, и угла $ECq = 270^\circ - \phi$, синусъ и косинусъ бу-
душъ

дугѣ отрицательныя, для того, что первой по другую сторону діаметра АВ, а второй по другую сторону діаметра DCE падаетъ; слѣдственно выйдетъ $\sin.(270^\circ - \varphi) = -\cos. \varphi$. для того, что $rq = MQ = PC = \cos. \varphi$ и $\cos.(270^\circ - \varphi) = -\sin. \varphi$ по тому, что $Cr = MP = \sin. \varphi$. Наконецъ, когда уголъ φ сдѣлается равенъ 270° , то синусъ его будетъ $= -1$, а косинусъ $= 0$.

8. Когда же уголъ φ сдѣлается болѣе 270° , то синусъ начнетъ уменьшаться, а косинусъ увеличиваться и угла $ACR = 360^\circ - \varphi$ синусъ будетъ $= -\sin. \varphi$, косинусъ же его $= \cos. \varphi$, для того, что линія PC опять по ту же сторону діаметра DCE падаетъ начинаетъ, на которой прежде взята была за положительную. На послѣдокъ синусъ дѣлой окружности или угла, которой въ себѣ содержитъ 360° , синусъ будетъ $= 0$, а косинусъ $= 1$.

9. Изъ сихъ примѣчаній слѣдуетъ, что положивъ половину окружности круга $= \pi$ или $180^\circ = \pi$, и назвавъ какой ни есть уголъ буквою φ , выйдетъ всегда

$\sin. 0 \pi. = 0.$	$\cos. 0 \pi. = 1.$
$\sin. (\frac{1}{2} \pi - \varphi) = \cos. \varphi.$	$\cos. (\frac{1}{2} \pi - \varphi) = \sin. \varphi.$
$\sin. \frac{1}{2} \pi = 1.$	$\cos. \frac{1}{2} \pi = 0.$
$\sin. (\pi - \varphi) = \sin. \varphi.$	$\cos. (\pi - \varphi) = -\cos. \varphi.$
$\sin. \pi = 0.$	$\cos. \pi = -1.$
$\sin. (\frac{3}{2} \pi - \varphi) = -\cos. \varphi.$	$\cos. (\frac{3}{2} \pi - \varphi) = -\sin. \varphi.$
$\sin. \frac{3}{2} \pi = -1.$	$\cos. \frac{3}{2} \pi = 0.$
$\sin. (2 \pi - \varphi) = -\sin. \varphi.$	$\cos. (2 \pi - \varphi) = \cos. \varphi.$
$\sin. 2 \pi = 0.$	$\cos. 2 \pi = 1.$

Равнымъ образомъ будетъ.

$\sin. (\frac{5}{2} \pi - \varphi) = \cos. \varphi.$	$\cos. (\frac{5}{2} \pi - \varphi) = \sin. \varphi.$
$\sin. \frac{5}{2} \pi = 1.$	$\cos. \frac{5}{2} \pi = 0.$
$\sin. (3 \pi - \varphi) = \sin. \varphi.$	$\cos. (3 \pi - \varphi) = -\cos. \varphi.$
$\sin. 3 \pi = 0.$	$\cos. 3 \pi = -1.$
$\sin. (\frac{7}{2} \pi - \varphi) = -\cos. \varphi.$	$\cos. (\frac{7}{2} \pi - \varphi) = -\sin. \varphi.$
$\sin. \frac{7}{2} \pi = -1.$	$\cos. \frac{7}{2} \pi = 0.$
$\sin. (4 \pi - \varphi) = -\sin. \varphi.$	$\cos. (4 \pi - \varphi) = \cos. \varphi.$
$\sin. 4 \pi = 0.$	$\cos. 4 \pi = 1.$

И вообще, если n будетъ означать цѣлое какое ни есть число положительное, то выйдетъ всегда

$$\sin. \left(\frac{n+1}{2} \pi - \varphi \right) = \cos. \varphi; \quad \cos. \left(\frac{n+1}{2} \pi - \varphi \right) = \sin. \varphi.$$

$$\sin. \left(\frac{n+2}{2} \pi - \varphi \right) = \sin. \varphi; \quad \cos. \left(\frac{n+2}{2} \pi - \varphi \right) = -\cos. \varphi.$$

$$\sin. \left(\frac{n+3}{2} \pi - \varphi \right) = -\cos. \varphi; \quad \cos. \left(\frac{n+3}{2} \pi - \varphi \right) = -\sin. \varphi.$$

$$\sin. \left(\frac{n+4}{2} \pi - \varphi \right) = -\sin. \varphi; \quad \cos. \left(\frac{n+4}{2} \pi - \varphi \right) = \cos. \varphi.$$

10. Изъяснивъ синусы и косинусы, приступимъ теперь къ тангенсамъ и прочимъ линіямъ въ Тригонометріи употребляемымъ. На сей конецъ въ точкѣ А къ діаметру АВ проводи безпредѣльно перпендикулярную линію, и изъ центра С чрезъ точку на окружности круга возьмю М прояди линію СМТ пересѣкающую касательную линію въ точкѣ Т, тогда линія АТ называется *тангенсомъ угла* $\angle АСТ = \varphi$, или дуги АМ, и пишется обыкновенно такъ: $АТ = \text{tang. } \varphi$ или $АТ = \text{tg } \varphi$. Линія же DN стоящая перпендикулярно на діаметрѣ DE и касающаяся окружности въ точкѣ D называется тангенсъ угла $\angle DCM = 90^\circ - \varphi$, или *котангенсъ угла* φ , или всегда бываетъ $DN = \text{tg. } (90^\circ - \varphi) = \cot. \varphi$.

11. Линія СТ изъ центра къ тангенсу проведенная называется *секансъ угла* $\angle АСМ = \varphi$. Линія же CN секансъ угла $\angle MCD = 90^\circ - \varphi$ проведенная къ котангенсу называется *косекансомъ угла* φ . Первая изображается обыкновенно такъ: $СТ = \text{sec. } \varphi$, а другая $CN = \text{cosec. } \varphi$.

12. Часть радіуса заключающагося между синусомъ и дугою называется *синусъ обращенной*. Такъ линія AP будетъ синусъ обращенной угла φ , которой обыкновенно такъ означаеся: $AP = \sin. \text{ver. } \varphi$. Но поелику $AC = 1$ по положенію, а $CP = \cos. \varphi$, то будетъ $\sin. \text{ver. } \varphi = 1 - \cos. \varphi$.

Черт.

2

13. Положимъ теперь въ квадрантѣ ACD, коего радіусъ $CA = CD = 1$, уголъ $\angle АСМ = \varphi$, коего дополненіе до угла прямого $\angle DCM = 90^\circ - \varphi = \theta$. По томъ проведемъ прямыя линіи MP и MQ къ СА и CD перпендикулярныя, такъ же изъ А и D касательныя линіи АТ и DN, съ кои-

ми

ми продолженный радіусъ встрѣчается въ точкахъ Т и N; что сдѣлавъ надлежитъ примѣчать слѣдующія наименованія въ разсужденіи угла φ . 1. $PM = \sin. \varphi$: 2. $AT = \operatorname{tg.} \varphi$, и 3. $CT = \sec. \varphi$. а въ разсужденіи угла θ , 1. $MQ = CP = \sin. \theta = \cos. \varphi$. 2. $DN = \operatorname{tg.} \theta = \cot. \varphi$, и 3. $CN = \sec. \theta = \operatorname{cosec.} \varphi$. Слѣдственно шесть выходитъ опредѣленій для угла φ , кои суть 1. $\sin. \varphi = PM$. 2. $\cos. \varphi = CP$. 3. $\operatorname{tg.} \varphi = AT$. 4. $\cot. \varphi = DN$. 5. $\sec. \varphi = CT$, и 6. $\operatorname{cosec.} \varphi = CN$.

14. Описавъ линіи въ тригонометріи обыкновенно употребляемыя, приступимъ теперь къ разсмотрѣнію ихъ свойствъ. Первое изъ прямоугольнаго треугольника CPM слѣдуетъ очевидно $\sin. \varphi^2 + \cos. \varphi^2 = 1$, откуда $\sin. \varphi = \sqrt{1 - \cos. \varphi^2}$ или $\cos. \varphi = \sqrt{1 - \sin. \varphi^2}$. И такъ по данному косинусу можно найти синусъ, и обратно.

15. По томъ изъ прямоугольнаго треугольника CAT выйдетъ $\operatorname{tg.} \varphi^2 + 1 = \sec. \varphi^2$, откуда $\sec. \varphi = \sqrt{\operatorname{tg.} \varphi^2 + 1}$, а $\operatorname{tg.} \varphi = \sqrt{\sec. \varphi^2 - 1}$.

16. Наконецъ изъ треугольника прямоугольнаго CDN получимъ $\cot. \varphi^2 + 1 = \operatorname{cosec.} \varphi^2$, откуда $\operatorname{cosec.} \varphi = \sqrt{\cot. \varphi^2 + 1}$, или $\cot. \varphi = \sqrt{\operatorname{cosec.} \varphi^2 - 1}$.

17. Теперь изъ подобія треугольниковъ CPM и CAT выходятъ слѣдующія три пропорціи:

1я. $CP : PM = CA : AT$, или $\cos. \varphi : \sin. \varphi = 1 : \operatorname{tg.} \varphi$, откуда $\sin. \varphi = \cos. \varphi \cdot \operatorname{tg.} \varphi$, или $\cos. \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\operatorname{tg.} \varphi}$ или $\operatorname{tg.} \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$.

2я. $CP : CM = CA : CT$ или $\cos. \varphi : 1 = 1 : \sec. \varphi$; откуда $\cos. \varphi \cdot \sec. \varphi = 1$ или $\cos. \varphi = \frac{1}{\sec. \varphi}$ или $\sec. \varphi = \frac{1}{\cos. \varphi}$.

3я. $PM : CM = AT : CT$, или $\sin. \varphi : 1 = \operatorname{tg.} \varphi : \sec. \varphi$, откуда $\operatorname{tg.} \varphi = \sin. \varphi$ или $\sin. \varphi = \frac{\operatorname{tg.} \varphi}{\sec. \varphi}$ или $\sec. \varphi = \frac{\operatorname{tg.} \varphi}{\sin. \varphi}$.

18. Поскольку треугольники CDN и CQM подобны между собою, то слѣдуетъ

1е. $CQ : QM = CD : DN$ или $\sin. \varphi : \cos. \varphi = 1 : \cot. \varphi$ откуда $\cos. \varphi = \sin. \varphi \cdot \cot. \varphi$, или $\sin. \varphi = \frac{\cos. \varphi}{\cot. \varphi}$ или $\cot. \varphi = \frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi}$.

2е. $CQ : CM = CD : CN$ или $\sin. \varphi : 1 = 1 : \cos. \varphi$;
откуда $\sin. \varphi \cdot \cos. \varphi = 1$ или $\sin. \varphi = \frac{1}{\cos. \varphi}$ или
 $\cos. \varphi = \frac{1}{\sin. \varphi}$.

19. На конецъ изъ подобія треугольниковъ CDN и CAT слѣдуетъ

$CA : AT = DN : DC$, или $1 : \operatorname{tg.} \varphi = \cot. \varphi : 1$; откуда
 $\operatorname{tg.} \varphi \cdot \cot. \varphi = 1$ или $\operatorname{tg.} \varphi = \frac{1}{\cot. \varphi}$ или $\cot. \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg.} \varphi}$.

20. Подставивъ теперь въ формулахъ $\operatorname{tg.} \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$
и $\cot. \varphi = \frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg.} \varphi}$ въ § 16, 17 и 18 найденныхъ
вмѣсто $\sin. \varphi$ и $\cos. \varphi$ величины въ § 8 назначенныя, по-
лучимъ

$$\operatorname{tg.} 0 = \frac{\sin. 0}{\cos. 0} = \frac{0}{1} = 0; \quad \cot. 0 = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{tg.} \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin. \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi \right)}{\cos. \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi \right)} = \frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi} = \cot. \varphi; \quad \cot. \left(\frac{1}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi} = \operatorname{tg.} \varphi$$

$$\operatorname{tg.} \frac{1}{2} \pi = \frac{\sin. \frac{1}{2} \pi}{\cos. \frac{1}{2} \pi} = \frac{1}{0} = \infty \quad \cot. \frac{1}{2} \pi = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tg.} (\pi - \varphi) = \frac{\sin. (\pi - \varphi)}{\cos. (\pi - \varphi)} = \frac{\sin. \varphi}{-\cos. \varphi} = -\operatorname{tg.} \varphi; \quad \cot. (\pi - \varphi) = \frac{-\cos. \varphi}{\sin. \varphi} = -\cot. \varphi$$

$$\operatorname{tg.} \pi = \frac{\sin. \pi}{\cos. \pi} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \cot. \pi = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\operatorname{tg.} \left(\frac{3}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin. \left(\frac{3}{2} \pi - \varphi \right)}{\cos. \left(\frac{3}{2} \pi - \varphi \right)} = \frac{-\cos. \varphi}{-\sin. \varphi} = \cot. \varphi; \quad \cot. \left(\frac{3}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{-\sin. \varphi}{-\cos. \varphi} = \operatorname{tg.} \varphi$$

$$\operatorname{tg.} \frac{3}{2} \pi = \frac{\sin. \frac{3}{2} \pi}{\cos. \frac{3}{2} \pi} = \frac{-1}{0} = -\infty; \quad \cot. \frac{3}{2} \pi = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\operatorname{tg.} (2\pi - \varphi) = \frac{\sin. (2\pi - \varphi)}{\cos. (2\pi - \varphi)} = \frac{-\sin. \varphi}{\cos. \varphi} = -\operatorname{tg.} \varphi; \quad \cot. (2\pi - \varphi) = \frac{\cos. \varphi}{-\sin. \varphi} = -\cot. \varphi$$

$$\operatorname{tg.} 2\pi = \frac{\sin. 2\pi}{\cos. 2\pi} = \frac{0}{1} = 0. \quad \cot. 2\pi = \frac{1}{0} = \infty.$$

21. Такимъ же образомъ найдутся тангенсы и котан-
генсы угловъ $\left(\frac{5}{2} \pi - \varphi \right)$; $\frac{5}{2} \pi$; $3\pi - \varphi$ и проч. и вообще,
если

если n будет означать целое какое ни есть число положительное; то будет всегда

$$\operatorname{tg} \left(\frac{n+1}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \pi - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{n+1}{2} \pi - \varphi \right)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \cot \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{n+1}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{n+2}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+2}{2} \pi - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{n+2}{2} \pi - \varphi \right)} = \frac{\sin \varphi}{-\cos \varphi} = -\operatorname{tg} \varphi;$$

$$\cot \left(\frac{n+2}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{-\cos \varphi}{\sin \varphi} = -\cot \varphi.$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{n+3}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+3}{2} \pi - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{n+3}{2} \pi - \varphi \right)} = \frac{-\cos \varphi}{-\sin \varphi} = \cot \varphi;$$

$$\cot \left(\frac{n+3}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{-\sin \varphi}{-\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{n+4}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+4}{2} \pi - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{n+4}{2} \pi - \varphi \right)} = \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\operatorname{tg} \varphi;$$

$$\cot \left(\frac{n+4}{2} \pi - \varphi \right) = \frac{\cos \varphi}{-\sin \varphi} = -\cot \varphi.$$

22. Изъ сихъ формулъ ясно видѣть можно, что тангенсы отъ 0 град. растутъ безпрестанно, и при 90° дѣлаются безконечно великими; по томъ уменьшаясь исчезаютъ наконецъ при 180°; откуда опять увеличиваясь дѣлаются при 270° безконечно великими, а при 360° опять исчезаютъ. Что же касается до котангенсовъ, то съ ними бываетъ прошивное; ибо когда тангенсы растутъ, то котангенсы сплываются меньше; когда же тангенсы уменьшаются, то котангенсы растутъ: однимъ словомъ, когда тангенсъ равенъ, бываетъ или 0 или ∞ , то котангенсъ будетъ тогда равенъ или ∞ или 0. При томъ тангенсы и котангенсы въ 1. 3. 5, 7 и такъ далѣ четверти круга бываютъ положительныя, а во 2. 4. 6. 8 и проч. отрицательную величину имѣютъ, или падающъ по другую сторону діаметра даннаго круга.

23. Что касается до секансовъ, косекансовъ и обращеннаго синуса, то разыскивашъ ихъ свойства нѣмъ нужды; ибо они въ выкладкахъ Тригонометрическихъ рѣдко упошребляюся; да при томъ и безъ нихъ обойтись можно, полагая $\frac{1}{\cos \phi}$ вмѣсто сек. ϕ ; $\frac{1}{\sin \phi}$ вмѣсто cosec. ϕ ; $1 - \cos \phi$ вмѣсто $\sin. \text{verf. } \phi$. Ежели же кто знаетъ пожелаетъ ихъ перемѣну, томъ легко до сего можетъ дойти, поставляя шолько величины вмѣсто $\sin. \phi$ и $\cos. \phi$ въ § 8 назначенныя.

24. Синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы того же угла, но въ разныхъ кругахъ, содержащяся между собою такъ какъ радіусы, коими круги описаны.

Черт.

3.

Доказательство: Пусть будетъ предложенный уголъ $\angle A = \phi$ и дуги радіусами AD и Ad описанныя NCD и ncd ; прошиянувъ перпендикуляры CB , cb , DE , de , NG и ng , будущъ CB и cb синусы угла ϕ ; AB и Ab косинусы, DE и de тангенсы, NG и ng котангенсы, AE и Ae секансы и наконецъ AG и Ag косекансы. Но поелику линіи CB , DE , cb и de параллельны между собою, то произойдетъ:

1е. $CB : cb = AC : Ac$, (ш. е.) синусы содержащяся, какъ радіусы.)

2е. $AB : Ab = AD : Ad = AC : Ac$ (ш. е.) косинусы содержащяся какъ радіусы.

3е. $DE : de = AD : Ad = AC : Ac$ (тангенсы какъ радіусы.)

4е. $AE : Ae = AD : Ad = AC : Ac$ (секансы какъ радіусы.)

По томъ, поелику линіи NG и ng параллельны между собою, выйдешъ

1е. $NG : ng = AN : An = AC : Ac$ (ш. е.) котангенсы содержащяся какъ радіусы.

2е. $AG : Ag = AN : An = AC : Ac$ (косекансы какъ радіусы.)

Изъ сего явствуетъ очевидно, что всѣ упомянутыя линіи, какъ то синусы, косинусы и проч. того же угла, но въ разныхъ кругахъ, содержащяся какъ радіусы, коими круги описаны.

25. Изъ сего слѣдуетъ очевидно, что какой бы радіусъ взявъ ни былъ, содержаніе синуса, косинуса и проч. къ радіусу не перемѣняюща, и оное какъ въ числахъ, такъ и въ линіяхъ точно изобразить можно: по сему явствуетъ, что величина радіуса или синуса дѣлаго зависить отъ нашего произволенія. Сіе содержаніе всѣхъ синусовъ къ радіусу или синусу дѣлому составляетъ такъ называемыя таблицы синусовъ, о сочиненіи коихъ ниже сего будетъ говорено.

26. По даннымъ синусу и косинусу угловъ a и b , найди синусъ и косинусъ суммы угловъ, или $\sin. (a+b)$ и $\cos. (a+b)$.

Рѣшеніе. Изъ центра C радіусомъ $CO=1$ опиши дугу круга OAB , на коей возьми $OA=a$, и $AB=b$, тогда выйдетъ дуга $OB=a+b$. По томъ къ CO проводи изъ A перпендикуляръ AP , такъ же изъ B къ CO перпендикуляръ BR , и изъ той же точки къ CA перпендикуляръ BQ . Что сдѣлавъ получимъ $AP=\sin. a$; $CP=\cos. a$; $BQ=\sin. b$; $CQ=\cos. b$; $BR=\sin. (a+b)$ и $CR=\cos. (a+b)$. Послѣ сего изъ Q къ CO проводи перпендикуляръ QS и параллельную съ CO линію QT ; тогда изъ подобія треугольниковъ CAP и CQS получимъ:

1. $CA : AP = CQ : QS$ или $1 : \sin. a = \cos. b : \sin. a \cos. b$.
2. $CA : CP = CQ : CS$ или $1 : \cos. a = \cos. b : \cos. a \cos. b$.

Слѣд: $QS = \sin. a \cos. b$ и $CS = \cos. a \cos. b$.

Такъ же изъ подобія треугольниковъ BQT и CAP выйдетъ

1. $CA : AP = BQ : QT$ или $1 : \sin. a = \sin. b : \sin. a \sin. b$.
2. $CA : CP = BQ : BT$ или $1 : \cos. a = \sin. b : \cos. a \sin. b$.

Слѣд. $QT = \sin. a \sin. b$ и $BT = \cos. a \sin. b$.

Опредѣливъ сіи линіи получимъ $BR = QT + BT$ или $\sin. (a+b) = \sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b$. Такъ же $CR = CS - RS$ или для $RS = QT$ получимъ $CR = CS - QT$ слѣдственно выйдетъ $\cos. (a+b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b$.

27. Положивъ въ найденныхъ уравненіяхъ $a=b$ выйдетъ $\sin. 2a = 2 \sin. a \cos. a$ и $\cos. 2a = \cos. a^2 - \sin. a^2$.

28. Въ послѣдней формулѣ $\cos a^2 - \sin a^2$ положивъ $1 - \cos a^2$ вмѣсто $\sin a^2$. (§. 14) получимъ

$$\cos 2a = 2 \cos a^2 - 1 \text{ откуда } \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}} \text{ или}$$

$$\cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \text{ положивъ } \frac{1}{2}a \text{ вмѣсто } a.$$

29. Въ сей же самой формулѣ $\cos a^2 - \sin a^2$ поставивъ $1 - \sin a^2$ вмѣсто $\cos a^2$ выйдетъ $\cos 2a = 1 - 2 \sin a^2$, откуда $\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$ или $\sin \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$ положивъ, какъ

и прежде $\frac{1}{2}a$ вмѣсто a .

30. Помноживъ формулы для $\sin \frac{1}{2}a$ и $\cos \frac{1}{2}a$ найденныя между собою, получимъ

$$\sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2} \frac{1 - \cos a}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos a^2}{2}} = \sqrt{\frac{\sin a^2}{2}} \\ = \frac{1}{2} \sin a, \text{ слѣдственно } \sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a.$$

31. Поелику всегда бываетъ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ и

$$\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \text{ то получимъ}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \text{ и } \cot \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}$$

Помноживъ первую формулу въ верху и внизу на $\sqrt{1 - \cos a}$, а вторую на $\sqrt{1 + \cos a}$ получимъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{\sqrt{1 - \cos a^2}} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \text{ и } \cot \frac{1}{2}a = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}$$

32. Раздѣливъ уравненія $\sin (a+b)$ и $\cos (a+b)$ одно на другое, получимъ

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}. \text{ Раздѣливъ съ верху и съ низу}$$

на $\cos a \cos b$ выйдетъ

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}; \text{ гдѣ положивъ } a = b \text{ получимъ}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a^2}. \text{ Положивъ такъ же } b = 2a \text{ выйдетъ}$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}; \text{ гдѣ вмѣсто } \operatorname{tg} 2a \text{ поставивъ } \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a^2} \text{ получимъ}$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a^3}{1 - 3 \operatorname{tg} a^2}. \text{ Такимъ же образомъ полагая } b = 3a;$$

$= 4a$; $= 5a$ и проч. найдутся $\operatorname{tg} 4a$; $\operatorname{tg} 5a$; $\operatorname{tg} 6a$, и такъ далѣе.

33. По даннымъ синусу и косинусу угловъ a и b най-
ти синусъ и косинусъ разности сихъ угловъ или $\sin. (a-b)$
и $\cos. (a-b)$.

Рѣшеніе: Описавъ дугу круга изъ центра C радиусомъ
 $CO = r$ возми на ней $OA = a$ и $AB = b$, тогда будетъ
 $OB = a + b$. Теперь изъ A къ CO , а изъ B къ CA про-
веди перпендикуляры AP и BQ , такъ же изъ B къ CO
перпендикуляръ BR , тогда получимъ $AP = \sin. a$; $CP =$
 $\cos. a$; $BQ = \sin. b$; $CQ = \cos. b$; $BR = \sin. (a-b)$ и $CR =$
 $\cos. (a-b)$. Проведши изъ Q къ CO перпендику-
ляръ QS , а изъ Q къ RB продолженной перпендикуляръ
 QT , изъ треугольниковъ подобныхъ CAP и CQS получимъ
1е. $CA: AP = CQ: QS$ или $1: \sin. a = \cos. b: \sin. a \cos. b$
2е. $CA: CP = CQ: CS$ или $1: \cos. a = \cos. b: \cos. a \cos. b$.
Слѣд: $QS = RT = \sin. a \cos. b$ и $CS = \cos. a \cos. b$. По-
томъ треугольники CAP и BQT подобны между собою,
для того, что углы $BQT + BQS = 90^\circ$ и
 $CQS + BQS = 90^\circ$ слѣдственно $BQT = CQS = CAP$, такъ же
уголъ $C =$ углу TBQ и уголъ $T =$ углу P ; слѣдственно
получимъ
1е. $CA: AP = BQ: RT$ или $1: \sin. a = \sin. b: \sin. a \sin. b$ и
2е. $CA: CP = BQ: BT$ или $1: \cos. a = \sin. b: \cos. a \sin. b$.
Слѣд: $RT = \sin. a \sin. b$ и $BT = \cos. a \sin. b$. Но поелику
 $BR = RT - BT$ и $CR = CS + RS = CS + QT$, то выйдетъ
 $\sin. (a-b) = \sin. a \cos. b - \cos. a \sin. b$ и
 $\cos. (a-b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b$.

34. Положивъ $a = 0$ выйдетъ $\sin. -b = -\sin. b$ и
 $\cos. -b = +\cos. b$ откуда $\operatorname{tg} -b = -\operatorname{tg} b$. И такъ косинусъ
угла отрицательнаго бываетъ всегда положительный, а
синусъ и тангенсъ того же угла дѣлаются отрицатель-
ными.

35. Положивъ $a = b$ будетъ $\sin. 0 = \sin. a \cos. a - \cos. a$
 $\sin. a = 0$, а $\cos. 0 = \cos. a^2 + \sin. a^2 = 1$, какъ уже видѣ-
ли въ §. 14.

36. Поелику $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$, то будетъ

Б 2

tg.

tg. $(a-b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$. Раздѣливъ
сверху и съ низу на $\cos a \cos b$ выйдетъ
tg. $(a-b) = \frac{\sin a + \cos a \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

37. Въ §. 26 и 33 нашли мы слѣдующія четыре уравненія :

$$I. \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$II. \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

$$III. \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$IV. \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Изъ коихъ I. со II. сложенное даетъ

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b. \text{ Но если II. изъ I. вычтемъ, то выйдетъ}$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b.$$

38. Положивъ въ сихъ найденныхъ двухъ уравненіяхъ $a+b=p$ и $a-b=q$, получимъ $a = \frac{p+q}{2}$ и $b = \frac{p-q}{2}$ слѣдственно выйдетъ $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ и $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$.

39. Раздѣливъ $\sin p + \sin q$ на $\sin p - \sin q$, получимъ $\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}$. Но

$$\frac{\sin \frac{p+q}{2}}{\cos \frac{p+q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \text{ и } \frac{\cos \frac{p-q}{2}}{\sin \frac{p-q}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}. \text{ Слѣдственно}$$

$$\frac{\sin \frac{p+q}{2}}{\sin \frac{p-q}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}}, \text{ откуда выходитъ слѣдующая пропорція;}$$

$\sin p + \sin q : \sin p - \sin q = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2} : \operatorname{tg} \frac{p-q}{2}$. По сему, если даны будутъ два угла, то сумма синусовъ содержитсяъ всегда къ разности синусовъ, такъ какъ тангенсъ половины суммы данныхъ угловъ къ тангенсу половины разности ихъ же самыхъ угловъ.

40. Сложивъ III. уравненіе съ IV. получимъ
 $\cos.(a+b) + \cos.(a-b) = 2 \cos. a \cos. b$, гдѣ, какъ и прежде,
 положивъ $a+b = p$ и $a-b = q$ выйдемъ
 $\cos. p + \cos. q = 2 \cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}$.

41. По помѣ III. вычти изъ IV, выйдемъ
 $\cos.(a-b) - \cos.(a+b) = 2 \sin. a \sin. b$. Положивъ $a+b = p$
 и $a-b = q$, получимъ
 $\cos. q - \cos. p = 2 \sin. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}$.

42. Раздѣливъ $\cos. q - \cos. p$ на $\cos. p + \cos. q$, получимъ
 $\frac{\cos. q - \cos. p}{\cos. p + \cos. q} = \frac{2 \sin. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}}{2 \cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2}} \cdot \frac{\sin. \frac{p-q}{2}}{\cos. \frac{p-q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \operatorname{tg} \frac{p-q}{2}$

или $\frac{\cos. q - \cos. p}{\cos. p + \cos. q} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2}} \cdot \frac{\sin. \frac{p-q}{2}}{\cos. \frac{p-q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \operatorname{tg} \frac{p-q}{2}$
 $= \cot. \frac{p+q}{2} \cot. \frac{p-q}{2}$

43. По помѣ выйдемъ $\frac{\sin. p + \sin. q}{\cos. q - \cos. p} = \frac{2 \sin. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}}{2 \sin. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}} = \frac{\cos. \frac{p-q}{2}}{\sin. \frac{p-q}{2}} = \cot. \frac{p-q}{2}$
 $= \cot. \frac{p-q}{2}$

44. Такъ же $\frac{\sin. p - \sin. q}{\cos. p + \cos. q} = \frac{2 \cos. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}}{2 \cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}} = \frac{\sin. \frac{p-q}{2}}{\cos. \frac{p-q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p-q}{2}$

45. Равнымъ образомъ получимъ
 $\frac{\sin. p - \sin. q}{\cos. q - \cos. p} = \frac{2 \cos. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}}{2 \sin. \frac{p+q}{2} \sin. \frac{p-q}{2}} = \frac{\cos. \frac{p+q}{2}}{\sin. \frac{p+q}{2}} = \cot. \frac{p+q}{2}$

46. Наконецъ $\frac{\sin. p + \sin. q}{\cos. p + \cos. q} = \frac{2 \sin. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}}{2 \cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2}$

47. Изъ сихъ найденныхъ формулъ слѣдующія можно
 вывести теоремы:

1. $\frac{\sin. p + \sin. q}{\cos. p + \cos. q} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2} \cos. \frac{p-q}{2}} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2}$ для того, что $\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} = \frac{\sin. \frac{p+q}{2}}{\cos. \frac{p+q}{2}}$

$$2. \frac{\sin. p + \sin. q. \cos. p + \cos. q}{\sin. p - \sin. q. \cos. q - \cos. p} = \left(\cot. \frac{p+q}{2} \right)^2$$

$$3. \frac{\sin. p + \sin. q. \cos. q - \cos. p}{\sin. p - \sin. q. \cos. p + \cos. q} = \left(\tan. \frac{p+q}{2} \right)^2$$

48. Раздѣливъ I. уравненіе на II. (§ 37), получимъ

$$\frac{\sin. (a+b)}{\sin. (a-b)} = \frac{\sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b}{\sin. a \cos. b - \cos. a \sin. b}$$
 Раздѣливъ сверху и снизу на $\cos. a \cos. b$ выйдетъ

$$\frac{\sin. (a+b)}{\sin. (a-b)} = \frac{\tan. a + \tan. b}{\tan. a - \tan. b}$$

49. Наконецъ III. уравненіе раздѣливъ на IV выйдетъ

$$\frac{\cos. (a+b)}{\cos. (a-b)} = \frac{\cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b}$$
 Раздѣливъ сверху и снизу на $\sin. a \cos. b$ получимъ

$$\frac{\cos. (a+b)}{\cos. (a-b)} = \frac{\cot. a - \tan. b}{\cot. a + \tan. b} = \frac{\cot. b - \tan. a}{\cot. b + \tan. a}$$

50. Выше сего въ § 28 и 29 нашли мы
 $\sin. a^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2a$ и $\cos. a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a$, откуда
 весьма легко найти можно $\sin. a^3$, $\sin. a^4$, $\sin. a^5$ и проч.
 такъ же $\cos. a^3$, $\cos. a^4$, $\cos. a^5$, и проч. На сей конедъ
 первую формулу помноживъ на $\sin. a$ получимъ
 $\sin. a^3 = \frac{1}{2} \sin. a - \frac{1}{2} \sin. a \cos. 2a$; но
 $\sin. a \cos. 2a = \frac{1}{2} \sin. 3a - \frac{1}{2} \sin. a$ (§ 37); слѣд. выйдетъ
 $\sin. a^3 = \frac{3}{4} \sin. a - \frac{1}{4} \sin. 3a$. Помноживъ теперь $\sin. a^3$ на
 $\sin. a$ получимъ $\sin. a^4 = \frac{3}{4} \sin. a - \frac{1}{4} \sin. 3a \sin. a$; но
 $\sin. 3a \sin. a = \frac{1}{2} \cos. 2a - \frac{1}{2} \cos. 4a$ (§ 41); слѣдственно
 $\sin. a^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{8} \cos. 4a$. Такимъ же образомъ
 найдутся $\sin. a^5$, $\sin. a^6$, и такъ далѣе.

51. Дабы найти $\cos. a^3$, то помноживъ $\cos. a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a$
 на $\cos. a$ выйдетъ $\cos. a^3 = \frac{1}{2} \cos. a + \frac{1}{2} \cos. 2a \cos. a$; но
 $\cos. 2a \cos. a = \frac{1}{2} \cos. 3a + \frac{1}{2} \cos. a$ (§ 40) слѣдственно;
 $\cos. a^3 = \frac{3}{4} \cos. a + \frac{1}{4} \cos. 3a$. Помноживъ теперь $\cos. a^3$
 на $\cos. a$ получимъ $\cos. a^4 = \frac{3}{4} \cos. a^2 + \frac{1}{4} \cos. 3a \cos. a$; но
 $\cos. a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a$ и $\cos. 3a \cos. a = \frac{1}{2} \cos. 4a + \frac{1}{2} \cos. 2a$
 слѣд: $\cos. a^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{8} \cos. 4a$, и такъ далѣе.

52. Тѣ же самыя формулы найдутся для $\sin. a^4$ и
 $\cos. a^4$, если возмутся квадраты отъ $\sin. a^2$ и $\cos. a^2$;
 ибо получимъ $\sin. a^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{4} \cos. 2a^2$ и
 $\cos. a^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{4} \cos. 2a^2$; но $\cos. 2a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 4a$,
 поло-

положивъ въ формулѣ $\cos. a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2a$ (§ 50) $2a$ вмѣсто a ; слѣдовательно получимъ, какъ и прежде $\sin. a^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{8} \cos. 4a$ и $\cos. a^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos. 2a + \frac{1}{8} \cos. 4a$.

53. По данному синусу и косинусу какого ни есть угла найди синусъ и косинусъ угла въ двое, шрое, четверо, и такъ далѣе, большаго.

Рѣшеніе: пусть будетъ предложенный уголъ $A = a$. Между боками сего угла бери безпрестанно $AB = BC = CD = DE = EF$ и проч. = 1. тогда углы будутъ точно такіе, какъ въ фигурѣ назначено. По томъ опустивъ перпендикуляры Bb ; Cc ; Dd ; Ee и проч. выйдетъ $Bb = \sin. a = a$; $Ab = \cos. b = b$; $aa + bb = 1$. и $AC = 2b$. Поелику теперь треугольники ACc и ABb подобны между собою, то получимъ

1 е. $AB : Bb = AC : Cc$ или $1 : a = 2b : Cc$; слѣдственно $Cc = 2ab = \sin. 2a$.

2 е. $AB : Ab = AC : Ac$ или $1 : b = 2b : Ac$, слѣд: $Ac = 2bb$, откуда $BC = 2bb - 1 = CD = \cos. 2a$ и $AD = 4bb - 1$. Теперь изъ подобія треугольниковъ ADd и ABb слѣдуемъ 1 е. $AB : Bb = AD : Dd$ или $1 : a = 4bb - 1 : Dd$; слѣд: $Dd = 4abb - a = \sin. 3a$.

2 е. $AB : Ab = AD : Ad$ или $1 : b = 4bb - 1 : Ad$ слѣд: $Ad = 4b^3 - b$; и $Cd = 4b^3 - b - 2b = 4b^3 - 3b = \cos. 3a$; откуда $CE = 8b^3 - 6b$ и $AE = 8b^3 - 6b + 2b = 8b^3 - 4b$.

По томъ изъ подобія треугольниковъ ABb и AEe получимъ 1 е. $AB : Bb = AE : Ee$ или $1 : a = 8b^3 - 4b : Ee$; слѣд: $Ee = 8ab^3 - 4ab = \sin. 4a$.

2 е. $AB : Ab = AE : Ae$ или $1 : b = 8b^3 - 4b : Ae$ слѣд: $Ae = 8b^4 - 4bb$ и $DE = 8b^4 - 8bb + 1 = \cos. 4a$.

Такимъ же образомъ продолжая изчисленіе далѣе, найдемъ синусы и косинусы угловъ $5a$, $6a$, $7a$, и проч.

54. Разсматривая формулы для синусовъ и косинусовъ въ предъидущемъ § найденныя, примѣчаемъ, что ихъ найти можно, если послѣдняя формула помножится на $2b$, и изъ произведенія вычтется предпослѣдней терминъ, какъ

какъ то изъ слѣдующаго ясно уразумѣть можно. Положивъ $\sin. a = a$ и $\cos. a = b$, получимъ

$$\sin. 0 = 0 \quad \cos. 0 = 1$$

$$\sin. a = a \quad \cos. a = b$$

$$\sin. 2a = 2ab - 0 \quad \cos. 2a = 2bb - 1$$

$$\sin. 3a = 4abb - a \quad \cos. 3a = 4b^3 - 3b$$

$$\sin. 4a = 8ab^3 - 4ab \quad \cos. 4a = 8b^4 - 8bb + 1$$

$$\sin. 5a = 16ab^3 - 12ab^2 + a \quad \cos. 5a = 16b^5 - 20b^3 + 5b$$

$$\sin. 6a = 32ab^4 - 32ab^3 + 6ab \quad \cos. 6a = 32b^6 - 48bb^4 + 18b^2 - 1$$

и проч. и проч.

55. Сии же самыя формулы можно вывести изъ уравненій въ § 26 найденныхъ; а именно

$$\sin. (a+b) = \sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b, \text{ и}$$

$$\cos. (a+b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b;$$

ибо положивъ $a = b$ выйдетъ

$$\sin. 2a = 2 \sin. a \cos. a \text{ и } \cos. 2a = \cos. a^2 - \sin. a^2 = 2 \cos. a^2 - 1 \quad (\S 28).$$

Положивъ $b = 2a$, получимъ

$$\sin. 3a = \sin. a \cos. 2a + \cos. a \sin. 2a \text{ и } \cos. 3a = \cos. a \cos. 2a - \sin. a \sin. 2a.$$

$$\sin. 2a.$$

Поставивъ теперь вмѣсто $\sin. 2a$ и $\cos. 2a$ найденныя величины, выйдетъ

$$\sin. 3a = 4 \sin. a \cos. a^2 - \sin. a \text{ и } \cos. 3a = 2 \cos. a^3 - \cos. a - 2 \sin. a^2 \cos. a \text{ но } \sin. a^2 = 1 - \cos. a^2; \text{ слѣд: } \cos. 3a = 4 \cos. a^3 - 3 \cos. a.$$

Положивъ $b = 3a$, выйдетъ

$$\sin. 4a = \sin. a \cos. 3a + \cos. a \sin. 3a \text{ и } \cos. 4a = \cos. a \cos. 3a - \sin. a \sin. 3a.$$

Поставивъ вмѣсто $\sin. 3a$ и $\cos. 3a$ найденныя величины, получимъ

$$\sin. 4a = 8 \sin. a \cos. a^3 - 4 \sin. a \cos. a \text{ и } \cos. 4a = \cos. 4a - 3 \cos. a^2 - 4 \sin. a^2 \cos. a^2 - \sin. a^2.$$

Положивъ $1 - \cos. a^2$ вмѣсто $\sin. a^2$, получимъ

$$\cos. 4a = 8 \cos. a^4 - 8 \cos. a^2 + 1. \text{ Такимъ же образомъ}$$

можно найти синусы и косинусы угловъ $5a$, $6a$, $7a$, $8a$, и проч.; а по томъ положивъ $\sin. a = a$ и $\cos. a = b$, получимъ тѣ же самыя формулы, которыя въ прежнемъ § были выведены.

56. Поставимъ теперь вмѣсто a различные углы, какъ то 60° , 45° , 36° , 30° , 12° , и спашемъ искашь ихъ синусы и косинусы. Положивъ съ начала $a = 60^\circ$ получимъ
 $\sin. 60^\circ = a$; $\cos. 60^\circ = b$
 $\sin. 120^\circ = 2ab$; $\cos. 120^\circ = 2bb - 1$
 $\sin. 180^\circ = 4abb - a$; $\cos. 180^\circ = 4b^3 - 3b$;
 но извѣстно, что $\sin. 180^\circ = 0$; слѣд: получимъ $4abb - a = 0$; откуда найдемъ $b = \cos. 60^\circ = \frac{1}{2}$. Нашедъ b изъ уравненія $aa + bb = 1$. (§. 53), выйдетъ $a = \sin. 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ откуда $\text{tg. } 60^\circ = \sqrt{3}$.

57. Положивъ $a = 45^\circ$, выйдетъ
 $\sin. 45^\circ = a$; $\cos. 45^\circ = b$
 $\sin. 90^\circ = 2ab$; $\cos. 90^\circ = 2bb - 1$. Но $\cos. 90^\circ = 0$ и $\sin. 90^\circ = 1$. слѣд: $2bb - 1 = 0$ и $2ab = 1$. Изъ перваго уравненія получимъ $b = \sqrt{\frac{1}{2}}$, которую величину поставивъ во второмъ уравненіи выйдетъ $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$; слѣд: $\sin. 45^\circ = \cos. 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; откуда найдемъ $\text{tg. } 45^\circ = 1$.

58. Положивъ $a = 30^\circ$ выйдетъ
 $\sin. 30^\circ = a$; $\cos. 30^\circ = b$
 $\sin. 60^\circ = 2ab$; $\cos. 60^\circ = 2bb - 1$
 $\sin. 90^\circ = 4abb - a$; $\cos. 90^\circ = 4b^3 - 3b$; но $\cos. 90^\circ = 0$ а $\sin. 90^\circ = 1$. слѣд: $4b^3 - 3b = 0$ и $4abb - a = 1$. Изъ перваго уравненія выйдетъ $b = \cos. 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, которую величину поставивъ во второмъ уравненіи, найдемъ $a = \sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$; откуда $\text{tg. } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

59. Положивъ $a = 36^\circ$, получимъ
 $\sin. 36^\circ = a$ $\cos. 36^\circ = b$
 $\sin. 72^\circ = 2ab$ $\cos. 72^\circ = 2bb - 1$
 $\sin. 108^\circ = 4abb - a$ $\cos. 108^\circ = 4b^3 - 3b$. Но
 $\sin. 108^\circ = \sin. (180^\circ - 108^\circ) = \sin. 72^\circ$; слѣдовательно
 $4abb - a = 2ab$ или $4bb = 2b + 1$; откуда $b = \cos. 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$
 Но поелику $aa + bb = 1$; то вмѣсто b поставивъ $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, получимъ $a = \sin. 36^\circ = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}$

60. Положивъ $a=12^\circ$ получимъ,

$$\sin. 12^\circ = a \quad \cos. 12^\circ = b$$

$$\sin. 24^\circ = 2ab \quad \cos. 24^\circ = 2bb - 1$$

$$\sin. 36^\circ = 4abb - a \quad \cos. 36^\circ = 4b^3 - 3b.$$

Но поелику $\sin. 36^\circ = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$ и $\cos. 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$; слѣдоватъ

$$4abb - a = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} \text{ и } 4b^3 - 3b = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \text{ или положивъ } b = \frac{p}{4},$$

последнее уравненіе превратится въ $p^3 - 12p = 4 + 4\sqrt{5}$, откуда p найши не лзя; ибо онъ будеть не возможенъ.

Сего для надлежитъ намъ разрѣшить сей вопросъ другимъ образомъ. Извѣстно уже, что $\sin. 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos. 60^\circ = \frac{1}{2}$;

$$\sin. 36^\circ = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} \text{ и } \cos. 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ слѣдственно по}$$

$$\S. 26 \text{ получимъ } \sin. (60^\circ - 36^\circ) = \sin. 24^\circ = \sin. 60^\circ \cos. 36^\circ - \cos. 60^\circ \sin. 36^\circ, \text{ или } \sin. 24^\circ = \sqrt{\frac{3(1+\sqrt{5})}{8}} - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{8}}.$$

Нашедъ такимъ образомъ $\sin. 24^\circ$ по $\S. 14$ найдемъ

$$\cos. 24^\circ = \sqrt{1 - \sin. 24^{\circ 2}}; \text{ а по томъ по } \S. 29 \text{ выйдемъ}$$

$$\sin. 12^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos. 24^\circ}{2}}.$$

61. Симъ образомъ находить можно синусы и косинусы прочихъ угловъ: но надлежитъ примѣчать, что кромѣ найденныхъ нами синусовъ изобразить крашко прочіе весьма прудно, да и не возможно кажется; ибо при всякомъ разрѣшеніи доходишь будешь до уравненій вышшихъ степеней, коихъ разрѣшеніе превосходишь силы Математиковъ.

ГЛАВА II.

О нахожденіи и употребленіи таблицъ синусовъ.

62. Разсматривая выведенныя выше сего въ $\S. 9$. формулы, примѣчаемъ, что всѣ синусы ошъ о до 90° , такъ же ошъ 90° до 180° и проч. содержащя между о и 1, или радіу-

радіусомъ, или синусомъ ділымъ; слѣдственно всѣ средніе синусы между 0 и 90° и проч. будущъ дробі радиуса; по чему ихъ не иначе, какъ чрезъ десятичные дробі представить можно. Изъ сего слѣдуетъ, что для нахождения синусовъ надлежитъ изобразить числами содержаніе ихъ къ синусу ділому или точно, или ошъ истиннаго нечувствительно разнящееся, которое содержаніе, какъ мы уже въ §. 25 примѣнили, составляемъ такъ называемыя *таблицы синусовъ*, коихъ строеніе теперь мы показать намѣрены.

63. Тѣ же самыя формулы показывающіе намъ, что мы не имѣемъ причины продолжать таблицы синусовъ до безконечности, но довольно съ насъ, когда синусы ошъ 0 до 90° только изчислятся; ибо тѣ, кои будущъ болѣе 90° , удобно можно опредѣлить: на пр: если потребуется синусъ угла тупаго, какъ то 125° , то надлежитъ его съ начала опнять ошъ 180° , а по томъ разности 55 взять синусъ, которой вмѣстѣ будетъ синусъ угла 125° , для того, что $\sin. (180 - \varphi) = \sin. \varphi$ или углы φ и $180 - \varphi$ общей имѣющъ синусъ. Равнымъ образомъ, если понадобится найти синусъ угла на пр: 236° , то по формулѣ $\cos. (\frac{3}{2}\pi - \varphi) = -\sin. \varphi$ выйдетъ $\cos. (\frac{3}{2}\pi - 236^\circ) = \cos. 34^\circ = -\sin. 236^\circ$. Слѣдственно, взявъ косинусъ угла 34° и поставивъ передъ нимъ знакъ $-$, получишь синусъ предложеннаго угла 236° . Изъ сего слѣдуетъ очевидно, что хотя синусы ошъ 0 до 90° только изчисляются; однакожъ синусы всѣхъ возможныхъ угловъ по формуламъ въ §. 9 назначеннымъ безъ труда опредѣлить можно будемъ.

64. Такъ же въ §. 17, 18 и 19 нашли мы, что $\cos. \varphi \cdot \sec. \varphi = 1$; $\sin. \varphi \cdot \csc. \varphi = 1$ и $\tan. \varphi \cdot \cot. \varphi = 1$ или 1, или радиусъ, или синусъ ділой есть средняя пропорціональная линія между $\cos. \varphi$ и $\sec. \varphi$, такъ же между $\sin. \varphi$ и $\csc. \varphi$ и наконецъ между $\tan. \varphi$ и $\cot. \varphi$. Сего для сіи наименованія въ таблицахъ синусовъ такъ созову-
пляются:

$$\begin{array}{ll} \sin. \varphi & \dots \dots \cosec. \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi & \dots \dots \cot. \varphi \\ \sec. \varphi & \dots \dots \operatorname{cosec} \varphi \end{array}$$

которое сопряженіе еще лучше въ логариѣмахъ видѣть можно; ибо выходящѣ всегда $1. \sin. \varphi + 1. \cosec. \varphi = 0$; $1. \operatorname{tg} \varphi + 1. \cot. \varphi = 0$; $1. \sec. \varphi + 1. \operatorname{cosec} \varphi = 0$, такъ что $1. \sin. \varphi = -1. \cosec. \varphi$; $1. \operatorname{tg} \varphi = -1. \cot. \varphi$; $1. \sec. \varphi = -1. \operatorname{cosec} \varphi$. Но поелику въ простыхъ выкладкахъ отрицательныя величины избѣгаются; то въ таблицахъ синусовъ всѣхъ логариѣмовъ характеристики то увеличивающія; по чему выйдетъ

$$\begin{array}{ll} 1. \sin. \varphi + 1. \cosec. \varphi = 20; & 1. \operatorname{tg} \varphi + 1. \cot. \varphi = 20 \text{ и} \\ 1. \sec. \varphi + 1. \operatorname{cosec} \varphi = 20. \end{array}$$

65. Поелику мы выше сего нашли, что $\sin. (90^\circ - \varphi) = \cos. \varphi$; $\cos. (90^\circ - \varphi) = \sin. \varphi$; $\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi) = \cot. \varphi$; $\cot. (90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg} \varphi$; $\sec. (90^\circ - \varphi) = \operatorname{cosec} \varphi$ и $\operatorname{cosec} (90^\circ - \varphi) = \sec. \varphi$; то изъ сего ясно уразумѣть можно причину, для чего въ таблицахъ синусовъ верхніе градусы отъ 0° до 45° въ правую сторону простираются; а нижнія въ лѣвую сторону отъ 45° до 90° ; такъ же понять можно и то, для чего въ низу находятся дополненія только до прямыхъ, а въ верху самыя углы.

66. Равнымъ образомъ нашли мы выше сего слѣдующія формулы: $\sin. \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$; $\cos. \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$; $\sin. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$; $\cos. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$; $\sin. 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos. 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sin. 60^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \cos. 30^\circ$; $\cos. 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin. 30^\circ$; $\sin. 36^\circ = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}}$; $\cos. 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$; $\sin. 24^\circ = \sqrt{\frac{3(1 + \sqrt{5})}{8}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{8}}$ и $\cos. 24^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 24^\circ}$; посредствомъ коихъ весьма удобно найдутся таблицы всѣхъ синусовъ, какъ то изъ слѣдующаго ясно уразумѣть можно.

Изъ $\sin. 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos. 45^\circ$ найдутся семь синусовъ.

67. По формуламъ $\sin. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$ и $\cos. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$ получимъ

$$\sin. 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} \text{ и } \cos. 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} \text{ такъ же}$$

$\sin.$

$\sin. 11^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 22^\circ 30'}{2}}$ и $\cos. 11^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 22^\circ 30'}{2}}$. Но

поскольку угла $11^\circ, 15'$ больше на половины разделить не мож-

но, то по формулам $\sin. (90^\circ - \varphi) = \cos. \varphi$ и $\cos. (90^\circ - \varphi) = \sin. \varphi$ взявъ найденныхъ угловъ дополненія, получимъ

$\sin. (90^\circ - 22^\circ, 30') = \sin. 67^\circ, 30' = \cos. 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 45^\circ}{2}}$

$\cos. (90^\circ - 22^\circ, 30') = \cos. 67^\circ, 30' = \sin. 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 45^\circ}{2}}$, по томъ

$\sin. (90^\circ - 11^\circ, 15') = \sin. 78^\circ, 45' = \cos. 11^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 22^\circ 30'}{2}}$ и

$\cos. (90^\circ - 11^\circ 15') = \cos. 78^\circ, 45' = \sin. 11^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 22^\circ, 30'}{2}}$,

поскольку здѣсь найденнаго угла $78^\circ, 45'$ на половины. больше дѣлится не можно, то взявъ половину угла $67^\circ, 30'$ получимъ

$\sin. 33^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 67^\circ, 30'}{2}}$ и $\cos. 33^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 67^\circ, 30'}{2}}$,

по томъ $\sin. (90^\circ - 33^\circ, 45') = \sin. 56^\circ, 15' = \cos. 33^\circ, 45'$ и

$\cos. (90^\circ - 33^\circ, 45') = \cos. 56^\circ, 15' = \sin. 33^\circ, 45'$, коего угла

половины взявъ уже больше не можно. Слѣдственно изъ

синуса 90° найдутся синусы и косинусы слѣдующихъ уг-

ловъ: $45^\circ, 0'$; $22^\circ, 30'$; $67^\circ, 30'$; $33^\circ, 45'$; $56^\circ, 15'$; $10^\circ, 15'$;

и $78^\circ, 45'$.

Изъ $\sin. 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos. 60^\circ = \frac{1}{2}$ найдутся 16 синусовъ.

68. Съ самаго начала по формуламъ $\sin. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos. \varphi}{2}}$ и $\cos. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos. \varphi}{2}}$ получимъ

$\sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$ и $\cos. 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin. 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos. 30^\circ}{2}}$; $\cos. 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos. 30^\circ}{2}}$

$\sin. 7^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 15^\circ}{2}}$; $\cos. 7^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 15^\circ}{2}}$

$\sin. 3^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 7^\circ, 30'}{2}}$; $\cos. 3^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 7^\circ, 30'}{2}}$.

Поскольку угла $3^\circ, 45'$ больше на половины дѣлится не можно, то найденныхъ угловъ взявъ дополненія до угла прямого, исключивъ только углы 60° и $30'$, за тѣмъ, что дополненія ихъ будутъ тѣ же самыя, получимъ

$$\sin. (90^\circ - 15^\circ) = \sin. 75^\circ = \cos. 15^\circ; \cos. (90^\circ - 15^\circ) = \cos. 75^\circ = \sin. 15^\circ.$$

$$\sin. (90^\circ - 7^\circ, 30') = \sin. 82^\circ, 30' = \cos. 7^\circ, 30'; \cos. (90^\circ - 7^\circ, 30') = \cos. 82^\circ, 30' = \sin. 7^\circ, 30'.$$

$$\sin. (90^\circ - 3^\circ, 45') = \sin. 86^\circ, 15' = \cos. 3^\circ, 45'; \cos. (90^\circ - 3^\circ, 15') = \cos. 86^\circ, 15' = \sin. 3^\circ, 45'.$$

Синусовъ найденныхъ угловъ 75° ; $82^\circ, 30'$ взявъ половины, получимъ

$$\sin. 37^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 75^\circ}{2}}; \cos. 37^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 75^\circ}{2}}$$

$$\sin. 18^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 37^\circ, 30'}{2}}; \cos. 18^\circ, 45' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 37^\circ, 30'}{2}}$$

$$\sin. 41^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 82^\circ, 30'}{2}}; \cos. 41^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 82^\circ, 30'}{2}},$$

коихъ взявъ дополненія, получимъ

$$\sin. (90^\circ - 37^\circ, 30') = \sin. 52^\circ, 30' = \cos. 37^\circ, 30';$$

$$\cos. (90^\circ - 37^\circ, 30') = \cos. 52^\circ, 30' = \sin. 37^\circ, 30';$$

$$\sin. (90^\circ - 18^\circ, 45') = \sin. 71^\circ, 15' = \cos. 18^\circ, 45';$$

$$\cos. (90^\circ - 18^\circ, 45') = \cos. 71^\circ, 15' = \sin. 18^\circ, 45';$$

$$\sin. (90^\circ - 41^\circ, 15') = \sin. 48^\circ, 45' = \cos. 41^\circ, 15' \text{ и}$$

$$\cos. (90^\circ - 41^\circ, 15') = \cos. 48^\circ, 45' = \sin. 41^\circ, 15'.$$

Синусъ половины угла $52^\circ, 30'$ будетъ

$$\sin. 26^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 - \cos. 52^\circ, 30'}{2}} \text{ и } \cos. 26^\circ, 15' = \sqrt{\frac{1 + \cos. 52^\circ, 30'}{2}},$$

кого дополненіе будетъ

$$\sin. (90^\circ - 26^\circ, 15') = \sin. 63^\circ, 45' = \cos. 26^\circ, 15' \text{ и}$$

$$\cos. (90^\circ - 26^\circ, 15') = \cos. 63^\circ, 45' = \sin. 26^\circ, 15'.$$

И такъ синусы и косинусы изъ угла 60° найдутся слѣдующіе:

3°	45'	26°	15'	48°	45'	71°	15'
7	30	30	0	52	30	75	0
15	0	37	30	60	0	82	30
18	45	41	15	63	45	86	15

69. Такимъ же образомъ поступая найдемъ изъ $\sin 36^\circ = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ и $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ слѣдующіе 32 синуса.

2° 15'	24° 45'	49° 30'	72° 0'
4 30	27 0	51 45	74 15
6 45	29 15	54 0	76 30
9 0	31 30	58 30	81 0
13 30	38 0	60 0	83 15
15 45	40 30	63 0	85 30
18 0	42 45	65 15	87 0
20 15	47 15	69 45	36 0

70. Наконецъ изъ синуса 24° найдутся слѣдующіе 64 синуса и косинуса.

0° 45'	25° 15'	45° 45'	68° 15'
1 30	24 0	46 30	69 0
3 0	25 30	48 0	70 30
5 15	27 45	50 15	72 45
6 0	28 30	51 0	73 30
8 15	30 45	53 15	75 45
9 45	32 15	54 45	77 15
10 30	33 0	55 30	78 0
12 0	34 30	57 0	79 30
12 45	35 15	57 45	80 15
14 15	36 45	59 15	81 45
16 30	39 0	61 30	84 0
17 15	39 45	62 15	84 15
19 30	42 0	64 30	87 0
21 0	43 30	66 0	88 30
21 45	44 15	66 45	89 15

71. Если синусы до сихъ поръ найденные приведутся въ порядокъ, то выйдетъ всѣхъ 120, кои всѣ 45 минутами разнятся, и изъ коихъ первой 45 минутъ, а послѣдній 90 градусовъ, какъ то изъ сей небольшой таблички ясно видѣть можно:

0°. 45'.	3°. 0'.	5°. 15'.	7°. 30'.	9°. 45'.
1. 30.	3. 45.	6. 0.	8. 15.	и проч.
2. 15.	4. 30.	6. 45.	9. 0.	90. 0.

Но дабы изъ сихъ 120 синусовъ найти прочіе, то слѣдующую надлежитъ принять въ помощь задачу:

72. По даннымъ синусамъ ZX и FR двухъ дугъ ZB и FB, коихъ разность не болѣе 45 минутъ, найди синусъ IS средней какой ниестъ дуги.

Рѣшеніе: Проведи перпендикуляръ FOQ, тогда будутъ ZQ и IO разности синусовъ ZX и IS въ разсужденіи синуса FR; и поелику дуга ZF не болѣе 45 минутъ, слѣд: она мала; то дуги ZF и IF чувствительно не будутъ разнишья отъ прямыхъ линій, и слѣд: ZFQ и IOF можно почесть за прямолинейные треугольники. И пакъ поелику IO параллельна съ ZQ, то выйдетъ ZF: IF = ZQ: IO, откуда $IO = \frac{IF \cdot ZQ}{ZF}$. По сему для нахождения синуса средней дуги

Черт:
7.

должно разность средней дуги и меньшей IF помножить на разность данныхъ синусовъ, и произведеніе разделить на разность дугъ, частное откуда произшедшее число придавъ къ меньшему данному синусу FR; тогда выйдетъ искомый средній синусъ IS.

73. Посредствомъ сея задачи ищи сперва между каждымъ изъ 120 синусовъ два средніе двухъ дугъ 15' разнящихся, кои присовокупивъ къ прежнимъ получишь синусы разнящіеся только 15 минутами. По томъ между каждымъ уже найденными ищи два средніе 5 минутами разнящіеся, а наконецъ между каждымъ ищи опять среднія четырехъ дугъ имѣющихъ разность въ 1 минуту, кои придавъ къ прежнимъ, получишь 5400 синусовъ; то есть всѣ синусы одною только минутою разнящіеся.

74. Нашедъ такимъ образомъ всѣ синусы и косинусы, можно весьма удобно найти прочія Тригонометрическія линіи, какъ то тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы: ибо всегда бываетъ, какъ уже прежде видѣли,

tg

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}; \quad \operatorname{cot} \phi = \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}; \quad \operatorname{sec} \phi = \frac{1}{\cos \phi} \quad \text{и} \\ \operatorname{cosec} \phi = \frac{1}{\sin \phi}.$$

75. Показавъ строеніе таблицъ синусовъ надлежитъ при семъ случаѣ примѣнить, что всѣ линіи Тригонометрическія изображаются чрезъ десятичныя дроби (§ 62) и слѣдственно при ихъ логариѣмахъ произойдутъ числа отрицательныя (чему доказательство и основаніе показано въ Универсальной Ариѣметикѣ г. Ейлера части I. въ § 250 и 251), для избѣжанія коихъ цѣлое число или характеристика 10 ю увеличивается; такъ не должно заключать, что соотвѣствующее число состоитъ изъ 10, 9, 8, и такъ далѣе, знаковъ, если характеристика будетъ 9, или 8, или 7, и проч.; но что число стоитъ позади запятой на первомъ мѣстѣ, когда съ начала логариѣма стоитъ 9, или на второмъ, если 8, или на третьемъ, когда характеристика будетъ 7. На примѣрѣ: если возьмется изъ таблицъ 1. $\sin. 2' = 6.7647561$, то найдется $\sin. 2' = 0.0005818$, и проч. И такъ при употребленіи таблицъ синусовъ надлежитъ смотрѣть на характеристику логариѣмовъ и къ синусамъ, кои въ таблицахъ обыкновенно цѣлыми представляются числами, прибавлять отъ правой руки къ лѣвой столько нулей, сколько требуетъ показанное въ семъ §. правило уничтожающее числа отрицательныя. Сіе же самое должно наблюдать и при исканіи чиселъ найденному логариѣму соотвѣствующихъ.

76. Кто такія таблицы синусовъ имѣетъ при себѣ, и разположеніе ихъ понялъ, тотъ легко найдетъ каждую Тригонометрическую линію, и слѣд: такъ же ея логариѣмъ, если уголъ данъ будетъ въ градусахъ и минутахъ, и обратно: если же Тригонометрическая линия или логариѣмъ оныя будетъ данъ, и потребуется сыскать уголъ соотвѣствующій, то въ такомъ случаѣ ищи тригонометрическую линію въ таблицахъ подъ тѣмъ же названіемъ, или вмѣсто того данной логариѣмъ въ логариѣмахъ линіи того же наименованія; тогда данное число или логариѣмъ дѣйствительно тамъ найдется, если со-

отвѣтствующій уголѣ содержитъ въ себѣ только градусы и минушы, секундѣ же и другихъ малѣйшихъ часней въ себѣ не имѣетъ. Въ первомъ случаѣ удобно назначить можно градусы и минушы въ искомомъ уголѣ содержащіяся.

77. Но если потребуются Тригонометрическія линіи или логариѣмы для такихъ угловъ, кои сверхъ градусовъ и минушъ содержатъ въ себѣ еще секунды; то при употребленіи таблицъ наблюдають слѣдующее правило: *Разности не только линій Тригонометрическихъ, но и ихъ логариѣмовъ пропорціональны суть разностямъ соответствующихъ угловъ.* Сіе самое правило употребляють такъ же и тогда, когда по данной Тригонометрической линіи, или логариѣму въ таблицахъ точко не находящемуся, потребуеся сыскать уголъ соответствующій. Въ обоихъ случаяхъ надлежитъ взять два числа или логариѣма одинакаго названія, кои одною только минушою разняшся, и изъ коихъ одно больше, а другое меньше, нежели данной уголѣ, или число, или логариѣмъ; что сдѣлавъ вычши одно изъ другаго, и употребивъ предложенное правило найдется искомое, какъ то изъ слѣдующихъ примѣровъ ясно уразумѣть можно. Дабы данному углу $53^{\circ}, 28', 54''$ сыскать логариѣмъ Тригонометрической линіи, то возми

$$l. \sin. 53^{\circ}. 29' = 9,9050852$$

$$l. \sin. 53. 28 = 9,9049916$$

Разность - - - - 936; по томъ посылай

$60'' : 936 = 54'' : 842$ и такъ къ $l. \sin. 53^{\circ}, 28'$ придавъ 842, получишь $l. \sin. 53^{\circ}. 28'. 54'' = 9,9050758$. По томъ

$$l. \operatorname{tg}. 53^{\circ}. 29' = 10,1305269$$

$$l. \operatorname{tg}. 53. 28 = 10,1302628$$

Разность - - - - 2641; слѣд:

$60'' : 2641 = 54'' : 2377$; придавъ 2377 къ $l. \operatorname{tg}. 53. 28'$, получимъ $l. \operatorname{tg}. 53^{\circ}. 28'. 54'' = 10,1305005$. Послѣ сего

$$l. \cos. 53^{\circ}. 28' = 9,7747288$$

$$l. \cos. 53^{\circ}. 29' = 9,7745583.$$

Разность - - - - 1705; слѣд:

$60'' :$

$60'' : 1705 = 54'' : 1534$; и такъ отъ $l. \cos. 53^\circ. 28'$ вычти 1534, останешся $l. \cos. 53^\circ. 29'. 54'' = 9.7745754$. На конецъ $l. \cos. 53^\circ. 28' = 9.8697372$
 $l. \cos. 53^\circ. 29' = 9.8694731$.

Разность - - - - 2641; слѣд:

$60'' : 2641 = 54'' : 2376$ и такъ отъ $l. \cos. 53^\circ. 28'$ вычти 2376, останешся $l. \cos. 53^\circ. 28'. 54'' = 9.8694996$.

Однимъ словомъ: найденное четвертое пропорціональное число тогда вычислять должно, когда логариѣмъ или число Тригонометрической линѣи большаго угла будешъ менѣе логариѣма или числа угла меньшаго; въ противномъ же случаѣ всегда придавать оное надобно.

78. Находясь полныя таблицы синусовъ, гдѣ разности каждаго логариѣмовъ назначены, дабы не имѣть труда находить ихъ во всякомъ особенномъ случаѣ. Тѣ же самыя разности пошребны и тогда, когда по данному логариѣму Тригонометрической линѣи надлежитъ сыскать уголъ соотвѣствующій; на примѣръ: пусть данъ будешъ $l. \sin. \alpha = 9.9426938$, и ищи α . Тогда получимъ

$l. \sin. 61^\circ. 13' = 9.9427255$	$l. \sin. \alpha = 9.9426938$
$l. \sin. 61^\circ. 12' = 9.9426561$	$l. \sin. 61^\circ. 12' = 9.9426561$

Разность - - - - 694 | Разность - - - - 377;

что сдѣлавъ посылай 694: $60'' = 377 : 32''$; слѣд: $\alpha = 61^\circ. 12'. 32''$.

Пусть будешъ данъ $l. \operatorname{tg} \alpha = 10.1948376$, тогда поступай такъ:

$l. \operatorname{tg} 57^\circ. 27' = 10.1949767$	$l. \operatorname{tg} \alpha = 10.1948376$
$l. \operatorname{tg} 57^\circ. 26' = 10.1946981$	$l. \operatorname{tg} 57^\circ. 26' = 10.1946981$

Разность - - - - 2786 | Разность - - - - 1395

что сдѣлавъ посылай 2786: $60'' = 1395 : 30''$; слѣд: $\alpha = 57^\circ. 26'. 30''$.

Пусть будешъ данъ $l. \cos. \alpha = 9.8807837$, тогда надлежитъ поступить такъ:

$l. \cos. 40^\circ. 32' = 9.8808296$	$l. \cos. \alpha = 9.8807837$
$l. \cos. 40^\circ. 33' = 9.8807215$	$l. \cos. 40^\circ. 33' = 9.8807215$
Разность - - - - 1081	Разность - - - - 622

что сдѣлавъ посылай 1081: $60'' = 622$: $34''$ слѣд: $\alpha = 40^\circ. 32'. 26''$.

Пусть будетъ на конедѣ данъ $l. \cos. \alpha = 9.8225385$, тогда выйдетъ

$l. \cos. 56^\circ. 24' = 9.8224286$	$l. \cos. \alpha = 9.8225385$
$l. \cos. 56^\circ. 24' = 9.8221545$	$l. \cos. 56^\circ. 24' = 9.8224286$
Разность - - - - 2741	Разность - - - - 1099

что сдѣлавъ, посылай 2741: $60'' = 1099$: $24''$; слѣд: $\alpha = 56^\circ. 23'. 36''$. Здѣсь то же самое примѣчать должно, что мы при концѣ предвѣдущаго § примѣтили, а именно, при синусахъ и тангенсахъ придавать, а при косинусахъ и котангенсахъ вычитать надобно секунды изъ угла содержащаго въ себѣ градусы и минуты.

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

ГЛАВА III.

О разрѣшеніи треугольниковъ.

79. Всякой треугольникъ составляющъ шесть частей, коиими опредѣляются три бока и три угла. Изъ Геометріи явствуетъ, что при части треугольника даны быть должны, чтобы можно было написать треугольникъ, а именно, 1е двѣ стороны и уголъ между ими содержащійся; 2е два угла и сторона, при которой упомянутые углы находятся; 3е всѣ три стороны, и 4е два бока въ прямоугольномъ треугольникѣ уголъ острый заключающіе: слѣдственно при части треугольника даны быть должны, чтобы найти прочія его части. При семъ надлежитъ примѣчать, что когда будутъ даны всѣ три угла, то боковъ его опредѣлить не можно; ибо треугольники равные углы имѣющіе хотя и будутъ

подобны, и ограничены боками пропорціональными, однако сколь велики должны быть бока, опредѣлить не можно: слѣдовательно, между данными тремя частями неопредѣленно одинъ бока долженъ. Сверхъ сего, когда два угла будущъ даны, то не надобно, чтобъ третій данъ былъ, по тому что онъ самъ собою будетъ извѣстенъ: по сему, когда даны только три угла, не можно почитать, какъ только двѣ данныя части треугольника. Такъ же, если въ прямоугольномъ треугольникѣ двѣ части даны будущъ, то къ даннымъ причислять должно всегда прямой уголъ, который довольно извѣстенъ, и по названію прямоугольнаго треугольника всегда его подразумѣвать надобно. Упомянувъ о семъ, приступимъ теперь къ разрѣшенію самыхъ треугольниковъ.

80. Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ ABC въ разсужденіи угла BAC = ϕ слѣдующія примѣтатъ должно опредѣленія.

Черт.
8.

$$1. \sin. \phi = \frac{BC}{AC}; \quad 2. \cos. \phi = \frac{AB}{AC}$$

$$3. \operatorname{tg}. \phi = \frac{BC}{AB}; \quad 4. \operatorname{cot}. \phi = \frac{AB}{BC}$$

$$5. \operatorname{sec}. \phi = \frac{AC}{AB}; \quad 6. \operatorname{cosec}. \phi = \frac{AC}{BC}$$

Доказательство: Опиши изъ A радіусомъ Ab = 1 четверть круга dbf, по томъ проводи перпендикуляръ bc и касательныя линіи de и fG; тогда для подобія треугольниковъ ABC и Acd выйдутъ слѣдующія пропорціи:

$$1. AB : AC = Ab : Ac = \cos. \phi : 1; \text{ откуда } \cos. \phi = \frac{AB}{AC}$$

$$2. BC : AC = bc : Ac = \sin. \phi : 1; \text{ откуда } \sin. \phi = \frac{BC}{AC}$$

по томъ изъ подобія треугольниковъ ABC и ADe слѣдуетъ

$$1. AB : BC = Ad : de = 1 : \operatorname{tg}. \phi; \text{ откуда } \operatorname{tg}. \phi = \frac{BC}{AB}$$

$$2. AB : AC = Ad : Ae = 1 : \operatorname{sec}. \phi; \text{ откуда } \operatorname{sec}. \phi = \frac{AC}{AB}$$

На конецъ изъ подобія треугольниковъ ABC и GfA получимъ:

$$1. AB : BC = fG : Af = \operatorname{cot}. \phi : 1; \text{ откуда } \operatorname{cot}. \phi = \frac{AB}{BC}$$

2. $BC: AC = Af: AG = 1: \cos \phi$; откуда $\cos \phi = \frac{AC}{BC}$.

81. Посредствомъ сей теоремы можно разрѣшитьъ всевозможные вопросы касающіеся до разрѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ, ибо по даннымъ двумъ частямъ всегда можно находить третью; на примѣръ: ежели въ прямоугольномъ Δk дана гипотенуза $AB = c$ вмѣстѣ съ угломъ ϕ , то прочія части найдутся слѣдующимъ образомъ: поелику $\sin \phi = \frac{BC}{c}$, то будетъ $BC = c \cdot \sin \phi$; такъ же для $\cos \phi = \frac{AC}{c}$ найдется $AC = c \cdot \cos \phi$; откуда по логарифмамъ удобно назначить можно бока AC и BC , ибо будетъ $l. BC = l. c + l. \sin \phi$ и $l. AC = l. c + l. \cos \phi$.

82. Поелику $BC = c \cdot \sin \phi$ и $AC = c \cdot \cos \phi$, то будетъ $BC^2 = cc \cdot \sin^2 \phi$ и $AC^2 = cc \cdot \cos^2 \phi$; откуда получимъ $AC^2 + BC^2 = cc \cdot \cos^2 \phi + cc \cdot \sin^2 \phi = cc (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$; но $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ (§ 14), слѣд: выйдетъ $AC^2 + BC^2 = cc = AB^2$, то есть теорема Пифагорова.

83. Во всякомъ треугольникѣ бока содержатся между собою такъ, какъ синусы угловъ бокамъ противолежащихъ.
Черт. 2. Доказательство: Опустивъ перпендикуляръ CP , и положивъ уголъ $BAC = \phi$, $ABC = \gamma$ и $ACB = \delta$ изъ треугольника прямоугольнаго ACP , получимъ $\sin \phi = \frac{CP}{AC}$, откуда $CP = AC \cdot \sin \phi$. Равнымъ образомъ изъ треугольника прямоугольнаго CPB выйдетъ $CP = CB \cdot \sin \gamma$; слѣдственно получимъ $AC \cdot \sin \phi = CB \cdot \sin \gamma$, откуда слѣдующая произойдетъ пропорція: $AC: CB = \sin \gamma: \sin \phi$; такъ же получимъ $AC: AB = \sin \gamma: \sin \delta$ и $CB: AB = \sin \phi: \sin \delta$, опустивъ только перпендикуляръ или изъ точки A , или изъ точки B ; слѣд: бока содержащіяся какъ синусы угловъ бокамъ противолежащихъ.

84. Поелику перпендикуляръ $CP = AC \cdot \sin \phi$, то отсюда назначить можно площадь самаго треугольника, которая и будетъ $= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \phi$. И такъ по даннымъ двумъ бокамъ AB и AC и угла между ими содержащагося ϕ найдется площадь $= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \phi$. Но если уголъ ϕ будетъ прямой, то для $\sin \phi = 1$ площадь, какъ уже
извѣ-

известно изъ Геометріи, будемъ $\frac{1}{2} AB \cdot AC$. Если же самая площадь будетъ известна, и положится $\frac{1}{2} bb$, то получимъ $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin. \varphi = \frac{1}{2} bb$, откуда изъ трехъ данныхъ четвертое всегда опредѣлишь можно.

85. Посредствомъ задачи въ § 82 предложенной удобно доказать можно то, что углы тупой и острей одинакой имѣютъ синусъ. На сей конецъ въ данномъ тупоугольномъ треугольникѣ ABC просянувъ изъ точки С на продолженное основаніе АВ перпендикуляръ CD, изъ треугольниковъ ACB и ACD получимъ слѣдующія двѣ пропорціи: 1. $AC : CB = \sin. ABC : \sin. A$ и 2. $AC : CD = 1 : (\sin. D)$: $\sin. A$, изъ коихъ слѣдуетъ $CD : CB = \sin. ABC : 1$. Но изъ треугольника CBD выходитъ $CD : CB = \sin. CBD : 1$; слѣд: $\sin. ABC : 1 = \sin. CBD : 1$; откуда слѣдуетъ очевидно, что $\sin. ABC = \sin. CBD$ или что углы тупой и острей одинакой имѣютъ синусъ. Сіе самое подтверждаетъ то, что выше сего въ § 6. сказано было.

Черт.
10.

86. Изъ данныхъ двухъ боковъ треугольника $AC = a$ и $AB = b$ и угла между ними содержащагося $BAC = \varphi$ найти третей бокъ и углы.

Черт.
9.

Рѣшеніе. Изъ угла С опустивъ перпендикуляръ CP, изъ треугольника прямоугольнаго ACP получимъ $CP = a \sin. \varphi$ и $AP = a \cos. \varphi$; откуда выйдетъ $BP = b - a \cos. \varphi$. Теперь изъ треугольника прямоугольнаго CPB получимъ $CB^2 = CP^2 + BP^2 = aa \sin. \varphi^2 + bb - 2ab \cos. \varphi + aa \cos. \varphi^2$, или $CB^2 = aa (\sin. \varphi^2 + \cos. \varphi^2) + bb - 2ab \cos. \varphi$; но $\sin. \varphi^2 + \cos. \varphi^2 = 1$ (§ 14) слѣд:

$CB^2 = aa + bb - 2ab \cos. \varphi$ или $CB = \sqrt{aa + bb - 2ab \cos. \varphi}$. Нашедъ CB найдутся удобно самые углы В и С; ибо по § 82 получимъ $\sin. \varphi : BC = \sin. B : a$, откуда $\sin. B = \frac{a \sin. \varphi}{BC}$, такъ же $\sin. \varphi : BC = \sin. C : b$, откуда $\sin. C = \frac{b \sin. \varphi}{BC}$.

87. Положивъ $a = b$ получимъ $CB = \sqrt{2aa - 2aa \cos. \varphi} = a \sqrt{2(1 - \cos. \varphi)}$. Но

1 — соф. $\varphi = 2 \sin. \frac{1}{2} \varphi^2$ (§ 29) слѣд: $CB = 2 a \sin. \frac{1}{2} \varphi$. Если уголъ φ будетъ прямой, то для $\sin. \varphi = 1$ и соф. $\varphi = 0$ выйдетъ, какъ уже извѣстно изъ Геометріи, $CB = \sqrt{aa+bb}$, такъ же $\sin. B = \frac{a}{CB} = \frac{a}{\sqrt{aa+bb}}$; и $\sin. C = \frac{b}{\sqrt{aa+bb}}$. Но если уголъ φ будетъ болѣе 90° , то для $\sin. (180^\circ - \varphi) = \sin. \varphi$ и соф. $(180^\circ - \varphi) = -\text{соф. } \varphi$ (§ 9) получимъ $CB = \sqrt{aa+bb+2ab \text{ соф. } \varphi}$, такъ же $\sin. B = \frac{a \sin. \varphi}{CB}$ и $\sin. C = \frac{b \sin. \varphi}{CB}$. Если же уголъ φ будетъ менѣе 90° , то выйдетъ, какъ уже видѣли, $CB = \sqrt{aa+bb-2ab \text{ соф. } \varphi}$.

Другое рѣшеніе.

88. Назвавъ углы неизвѣстные $ACB = p$ и $ABC = q$, выйдетъ $a : b = \sin. p : \sin. q$; откуда получимъ $a+b : a-b = \sin. p + \sin. q : \sin. p - \sin. q$; но $\sin. p + \sin. q : \sin. p - \sin. q = \text{tg. } \frac{p+q}{2} : \text{tg. } \frac{p-q}{2}$ (§ 39); слѣд: выйдетъ $a+b : a-b = \text{tg. } \frac{p+q}{2} : \text{tg. } \frac{p-q}{2}$, гдѣ $\frac{p+q}{2}$ извѣстно; слѣд: опредѣлятся изъ сей пропорціи полуразносъ $\frac{p-q}{2}$, которую придавъ къ полусуммѣ $\frac{p+q}{2}$ получишь p ; если же вычтешь оную, то найдешь q ; откуда уже по § 82 весьма легко опредѣлишь можно третей бокъ CB .

89. Изъ данныхъ трехъ боковъ a , b и $BC = c$ найти углы.

Рѣшеніе: Поелику мы прежде въ § 86 нашли $cc = aa + bb - 2ab \text{ соф. } \varphi$; то вычши съ обѣихъ сторонъ cc и придай $2ab \text{ соф. } \varphi$, тогда получимъ $2ab \text{ соф. } \varphi = aa + bb - cc$. Раздѣливъ шеперь на $2ab$ выйдетъ $\text{соф. } \varphi = \frac{aa+bb-cc}{2ab}$. Нашедъ такимъ образомъ $\text{соф. } \varphi$, найдется удобно и самой уголъ φ , откуда уже безъ труда опредѣлишь можно и прочіе углы.

90. Положивъ для примѣра $a=2$; $b=3$ и $c=4$, выйдетъ $\text{соф. } \varphi = \frac{13-16}{12} = -\frac{1}{4}$; изъ сего познаемъ, что уголъ φ будетъ тупой. Но дабы его найти, то ищи уголъ, коего синусъ $= \frac{1}{4} = 0,25$, и копорой будучи сложенъ съ

есть 90° даетъ искомой уголъ тупой ϕ . На сей конецъ положимъ шомъ уголъ, которой надлежитъ придать къ 90° , равенъ α , такъ, чтобы вышло $\sin. \alpha = \frac{1}{4} = 0.25$; поелику $l. \sin. \alpha = l. 1 - l. 4 = l. 0.25 = 9.3979400$, которому въ таблицахъ синусовъ соотвѣствуетъ уголъ $\alpha = 14^\circ, 28', 30''$; слѣдовательно уголъ $\phi = 104^\circ, 28', 30''$. Нашедъ уголъ ϕ , найдутся и прочіе углы по формуламъ $\cos. B = \frac{20^2 - 9^2}{16} = \frac{11}{16}$ и $\cos. C = \frac{25^2 - 4^2}{24} = \frac{7}{6}$; а именно, $B = 46^\circ, 34', 0''$; и $C = 28^\circ, 57', 18''$ или по предложенной въ § 82 теоремѣ.

90. Изъ данныхъ трехъ боковъ a , b и c опредѣлить площадь треугольника.

Рѣшеніе: Поелику мы прежде нашли $\cos. \phi = \frac{aa + bb - cc}{2ab}$, то будетъ $1 + \cos. \phi = \frac{2ab + aa + bb - cc}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - cc}{2ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$ и $1 - \cos. \phi = \frac{2ab - aa - bb + cc}{2ab} = \frac{(a-b)^2 + cc}{2ab} = \frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2ab}$ откуда выйдетъ $(1 + \cos. \phi)(1 - \cos. \phi) = 1 - \cos. \phi^2 = \sin. \phi^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4aabb}$ или $\sin. \phi = \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$. Но поелику площадь треугольника $= \frac{1}{2} ab \sin. \phi$ (§ 83); то будетъ искомая площадь $= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}}$ Положивъ теперь $\frac{a+b+c}{2} = f$, выйдетъ $\frac{a+b-c}{2} = f-c$; $\frac{a-b+c}{2} = f-b$; $\frac{-a+b+c}{2} = f-a$; слѣд: получимъ площадь $= \sqrt{f.f-a.f-b.f-c}$. Изъ сего слѣдуетъ, что ежели даны будутъ всѣ три бока, то для нахождения площади треугольника надлежитъ взять полусумму всѣхъ боковъ; по шомъ изъ сей полусуммы вычестъ каждой бока порознь; наконецъ какъ самую полусумму, такъ и разности между собою помножить, и изъ произведенія извлечь корень квадратной, которой и будетъ искомая площадь треугольника.



91. Положивъ $a=b=c$ выйдетъ площадь равнос-
торного треугольника $= \frac{1}{2}aa\sqrt{3}$. Ежели будетъ $a=b$,
то площадь равнобедреннаго треугольника выйдетъ
 $= \frac{1}{2}c\sqrt{4aa-cc}$.

92. Изъ данныхъ двухъ боковъ AC и AB и угла ко-
торому нибудь изъ данныхъ боковъ противолежащаго
опредѣлить другія части треугольника.

Рѣшеніе: Если сверхъ боковъ AC и AB извѣстенъ бу-
детъ уголъ B, то между сими боками и синусами про-
тиволожащихъ угловъ слѣдующая выйдетъ пропорція:
AC: AB = sin. B: sin. C, откуда найдется уголъ C, которой мо-
жетъ быть тупой, или острый, когда бокъ сему углу
противолежащій будетъ больше или меньше другаго. Ме-
жду тѣмъ, когда уголъ B будетъ тупой или острый, то
извѣстно, что уголъ C неопмѣнно долженъ быть острымъ;
но если B острый уголъ, и при томъ AC > AB, то C бу-
детъ такъ же уголъ острый; ибо иначе надлежало бы
быть AB > AC. И шакъ сомнительно бываетъ только то-
гда, когда B уголъ острый и при томъ AB > AC. Но при
употребленіи правилъ на самомъ дѣлѣ извѣстна бываетъ
уже напередъ нѣкоторымъ образомъ величина искомаго
угла; слѣдственно сомнѣніе сіе по большей части отвра-
щается. Нашедъ же уголъ C найдется и уголъ A, а по
томъ опредѣлятся и бокъ CB посредствомъ пропорцій
AC: CB = sin. B: sin. A.

93. Изъ данныхъ двухъ угловъ A и B и стороны AB
при которой находятся упомянутые углы, опредѣ-
лить прочихъ части треугольника.

Рѣшеніе: Поскольку синусы угловъ бокамъ противолежа-
щихъ бываютъ пропорціональны, то будетъ sin. A: sin. C
= CB: AB, откуда найдется CB = $\frac{AB \cdot \sin. A}{\sin. C}$. Нашедъ CB
найдется AC посылая, sin. A: sin. B = CB: AC слѣд:
AC = $\frac{CB \cdot \sin. B}{\sin. A}$, ч. п. н.

Разныя задачи.

94. По данной площади прямоугольнаго треугольника $ABC = bb$ вмѣстѣ съ угломъ $ACB = \gamma$ найти бока AB и BC . Черт. 8.

Рѣшеніе: Положивъ $AB = x$, выйдетъ слѣдующая пропорція: $\sin. \gamma : x = \cos. \gamma : BC$, откуда $BC = \frac{x \cos. \gamma}{\sin. \gamma} = x \cot. \gamma$.

Слѣд: площадь треугольника ABC будетъ $= \frac{1}{2} xx \cot. \gamma$, которая должна быть равна bb , слѣд: получимъ $bb =$

$= \frac{1}{2} xx \cot. \gamma$; откуда $xx = \frac{2bb}{\cot. \gamma}$ и $x = b \sqrt{\frac{2}{\cot. \gamma}} = b \sqrt{2 \operatorname{tg.} \gamma}$

(§ 19) $= AB$. Но поелику $BC = x \cot. \gamma$, то выйдетъ

$BC = b \cot. \gamma \sqrt{2 \operatorname{tg.} \gamma} = b \sqrt{2 \operatorname{tg.} \gamma \cot. \gamma^2}$, но $\operatorname{tg.} \gamma \cot. \gamma = 1$

(§ 19), то получимъ $BC = b \sqrt{2 \cot. \gamma}$.

Изъ сего слѣдуетъ очевидно, какимъ образомъ находить должно бока AB и BC по данной площади bb и угла γ .

95. По даннымъ угламъ при основаніи $BAC = \alpha$ и $ABC = \beta$ вмѣстѣ съ сегментомъ основанія AD найти другой сегментъ DB . Черт. 9.

Рѣшеніе: Положивъ $AD = a$ и $BD = x$, будетъ изъ треугольника прямоугольнаго ACD перпендикуляръ $CD = a \operatorname{tg.} \alpha$,

а изъ треугольника прямоугольнаго CDB получимъ $CD =$

$x \operatorname{tg.} \beta$, слѣд: выйдетъ $a \operatorname{tg.} \alpha = x \operatorname{tg.} \beta$, откуда $x = \frac{a \operatorname{tg.} \alpha}{\operatorname{tg.} \beta}$,

по сему для нахождения сегмента DB должно посылать такъ: $\operatorname{tg.} \beta : \operatorname{tg.} \alpha = a : x$ (т: е:) сегменты находящаяся въ обратномъ содержаніи тангенсовъ угловъ при основаніи.

96. По данной суммѣ боковъ треугольника ABC , $AC + BC = a$ вмѣстѣ съ углами при основаніи $CAB = \alpha$, $CBA = \beta$ найти бока AC и BC .

Рѣшеніе. Положивъ $AC = x$, будетъ $BC = a - x$; слѣд: получимъ $\sin. \alpha : \sin. \beta = a - x : x$; откуда выйдетъ $x \sin. \alpha = a \sin. \beta - x \sin. \beta$, или

$x = \frac{a \sin. \beta}{\sin. \alpha + \sin. \beta} = AC$ и $BC = a - x = \frac{a \sin. \alpha}{\sin. \alpha + \sin. \beta}$ слѣд:

$AC + BC : AC = \sin. \alpha + \sin. \beta : \sin. \beta$ (т: е:) сумма боковъ содержащаяся къ одному боку такъ, какъ сумма синусовъ угловъ при основаніи къ синусу угла тому боку противоположаго.

97. По данному основанію $AB=a$ какого нистъ треугольника и угловъ при основаніи α и β найти высоту.

Рѣшеніе. Назвавъ перпендикуляръ $CD=x$ изъ треугольника прямоугольнаго ACD выйдетъ $\sin. \alpha : x = \cos. \alpha : AD$; слѣд: $AD = \frac{x \cos. \alpha}{\sin. \alpha} = x \cot. \alpha$; равнымъ образомъ изъ другого треугольника прямоугольнаго CDB получимъ $DB = x \cot. \beta$; слѣд: выйдетъ $AD+DB=AB=a=x \cot. \alpha + x \cot. \beta$, откуда найдешся $x = \frac{a}{\cot. \alpha + \cot. \beta} = CD$.

Другое рѣшеніе:

98. Поскольку въ треугольникъ ABC синусъ угла ECB равенъ $\sin. (\alpha + \beta)$; ибо продолживъ бокъ AC , выйдетъ уголъ $ECB = \alpha + \beta$, и слѣд: синусы угловъ ACB и ECB будутъ одинаки; то получимъ $AC : \sin. \beta = a : \sin. (\alpha + \beta)$, откуда $AC = \frac{a \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$. По томъ изъ треугольника прямоугольнаго ACD получимъ $1 : AC = \sin. \alpha : CD$ слѣд: $CD = AC \sin. \alpha = x$, или $x = \frac{a \sin. \alpha \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$.

99. Поскольку мы здѣсь нашли двойную величину для x ; 1е. $x = \frac{a}{\cot. \alpha + \cot. \beta}$ и 2е. $x = \frac{a \sin. \alpha \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$, то сравнивъ сіи величины между собою получимъ $\frac{a}{\cot. \alpha + \cot. \beta} = \frac{a \sin. \alpha \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$. Поспавивъ $\frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$ вмѣсто $\cot. \alpha$ и $\frac{\cos. \beta}{\sin. \beta}$ вмѣсто $\cot. \beta$, получимъ $\frac{a \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \sin. \beta + \sin. \alpha \cos. \beta} = \frac{a \sin. \alpha \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$. Поскольку здѣсь числители равны, то и знаменателямъ надлежитъ быть равнымъ между собою; слѣд: получимъ, какъ уже давно извѣстно, $\sin. (\alpha + \beta) = \sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta$.

100. Найти треугольникъ ABC , кого периметръ или сумма трехъ боковъ извѣстна $= a$, площадь $= b$ и уголъ C данную величину имѣетъ $= \gamma$.

Рѣшеніе. Положивъ искомыя бока $AC = x$; $BC = y$ $AB = z$ и уголъ данной $C = \gamma$, получимъ
1е. $x + y + z = a$ или $x + y = a - z$. По томъ выйдетъ
2е. $\frac{1}{2} xy \sin. \gamma = bb$; или $xy = \frac{2bb}{\sin. \gamma}$; прешіе же уравненіе по-

лучи-

лучишься изъ § 85, а именно, $ZZ = xx + yy - 2xy \cos. \gamma$. Поелику $xy = \frac{2bb}{\sin. \gamma}$, то будетъ $2xy \cos. \gamma = \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma}$, что вмѣсто $2xy \cos. \gamma$ поставивъ, получимъ $ZZ = xx + yy - \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma}$, или $xx + yy = ZZ + \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma}$. Теперь взявъ квадратъ перваго уравненія выйдешъ $xx + 2xy + yy = aa - 2aZ + ZZ$, гдѣ вмѣсто $xx + yy$ и $2xy$ найденныя величины поставивъ получимъ $ZZ + \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma} + \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma} = aa - 2aZ + ZZ$, откуда найдется $2aZ = aa - \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma} + \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma}$, или $2aZ = aa - 4bb \cot. \frac{1}{2} \gamma$; но $\frac{\cos. \gamma + 1}{\sin. \gamma} = \cot. \frac{1}{2} \gamma$ (§ 31) слѣд: $2aZ = aa - 4bb \cot. \frac{1}{2} \gamma$, или $Z = \frac{aa - 4bb \cot. \frac{1}{2} \gamma}{2a}$. Нашедъ бокъ АВ = Z, прочія бока уже легко найши можно; ибо съ начала получимъ $x + y = a - Z = \frac{aa + 4bb \cot. \frac{1}{2} \gamma}{2a}$. Но поелику

$xx + yy = ZZ + \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma}$ и $xy = \frac{2bb}{\sin. \gamma}$, то будетъ $xx + yy - 2xy = ZZ + \frac{4bb \cos. \gamma}{\sin. \gamma} - \frac{4bb}{\sin. \gamma} = ZZ - 4bb \left(\frac{1 - \cos. \gamma}{\sin. \gamma} \right)$; но $\frac{1 - \cos. \gamma}{\sin. \gamma} = \operatorname{tg.} \frac{1}{2} \gamma$ (§ 31); слѣд: $xx - 2xy + yy = (x - y)^2 = ZZ - 4bb \operatorname{tg.} \frac{1}{2} \gamma$, или $x - y = \sqrt{ZZ - 4bb \operatorname{tg.} \frac{1}{2} \gamma}$. Нашедъ же $x - y$ изная, чему равно $x + y$, удобно можно опредѣлишь x и y и слѣд: разрѣшишь предложенной вопросъ по надлежащему.

101. Если уголъ γ будетъ прямой, то для $\sin. \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos. \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg.} \frac{1}{2} \gamma = 1$ и $\cot. \frac{1}{2} \gamma = 1$ выйдешъ $Z = \frac{aa - 4bb}{2a}$; $x + y = \frac{aa + 4bb}{2a}$ и $x - y = \sqrt{ZZ - 4bb}$.

102. Во всякомъ параллелограммѣ квадраты диагональныхъ линій АС и ВВ вѣдствъ езятыя равны квадратамъ боковъ такъ же вѣдствъ езятымъ.

Рѣшеніе. Поелику углы А и В составляютъ 180° , то Черт. по § 9, будетъ $\cos. А + \cos. В = 0$. И такъ въ треугольн.

никъ ABD по § 88 получимъ соф. $A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 AB \cdot AD}$. Равнымъ образомъ изъ треугольника ABC выйдетъ соф. $B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB \cdot BC}$; слѣдовательно получимъ соф. $A + \text{соф. } B = 0 = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 AB \cdot AD} + \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB \cdot BC}$. Но поелику $AD = BC$ и $AB = DC$, то выйдетъ $DC^2 + AD^2 - BD^2 + AB^2 + BC^2 - AC^2 = 0$, или $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2$ ч. н. н.

Черт.
12.

103. Въ чешвероугольникъ ABCD въ кругъ нарисованомъ, прямоугольничъ діагональныхъ линій бываетъ равенъ суммѣ прямоугольниковъ изъ боковъ противоположащихъ (т. е.) $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Рѣшеніе. Поелику углы $A + C = 180^\circ$, то будетъ соф. $A + \text{соф. } C = 0$ слѣд: назвавъ линіи $AB = a$; $BC = b$; $DC = c$; $AD = d$; $DB = f$ и $AC = g$, изъ треугольника ADB получимъ соф. $A = \frac{aa + dd - ff}{2 ad}$; а изъ треугольника DCB выйдетъ соф. $D = \frac{bb + cc - ff}{2 bc}$, слѣд: получимъ $\frac{aa + dd - ff}{2 ad} + \frac{bb + cc - ff}{2 bc} = 0$ помноживъ на $2 abcd$ выйдетъ $aabc + ddbc + acbb + ddcc = ffbd + daff = ff(bc + ad)$ или $ab(ac + bd) + cd(ac + bd) = ff(bc + ad)$ или $(ab + cd)(ac + bd) = ff(bc + ad)$ или $ff = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}$. Равнымъ образомъ найдемся $gg = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$, откуда выйдетъ $ffgg = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)(ac + bd)}{(bc + ad)(ab + cd)}$, или $ffgg = (ac + bd)^2$ или $fg = ac + bd$, ч. н. н.

104. Изъ сего слѣдуетъ, если всѣ бока чешвероугольника и при томъ одна діагональная линія будутъ даны, то отсюда можно всегда найти другую; ибо если a, b, c, d и f будутъ извѣстны, то найдемся $g = \frac{ac + bd}{f}$.

105. Нарисовать какой нистъ правильной полигонъ какъ внутри, такъ и около даннаго круга.

Черт.
13.

Рѣшеніе. Положивъ радіусъ круга $AC = r$, и число боковъ полигона $= n$, представимъ окружность круга на

n равныхъ частей раздѣленную, изъ коихъ одна пусть будетъ АВ бокъ вписаннаго полигона. По томъ проводи радиусы АС, ВС $= r$, тогда будетъ уголъ АСВ $= \frac{360^\circ}{n}$.

Раздѣли сей уголъ линіею СF по поламъ, кошорая раздѣлитъ такъ же и хорду АВ на двѣ равныя части, и къ ней будетъ перпендикулярна: но поелику уголъ АСF $= \frac{180^\circ}{n}$

то будетъ АЕ $= r \sin. \frac{180^\circ}{n}$ и СЕ $= r \cos. \frac{180^\circ}{n}$ слѣд: бокъ вписаннаго полигона АВ $= 2r \sin. \frac{180^\circ}{n}$. По томъ въ F къ

радиусу СF проводи перпендикуляръ MFN, кошорой коснется круга въ F, и кошорой пересѣкается радиусами АС и ВС въ точкахъ М и N; сія линія MN будетъ бокъ описаннаго около круга многоугольника. Но поелику FM $= r \operatorname{tg.} \frac{180^\circ}{n}$ слѣд: бокъ описаннаго около круга полигона MN $= 2r \operatorname{tg.} \frac{180^\circ}{n}$, откуда безъ труда можно опредѣлить бока всѣхъ полигоновъ какъ около круга, такъ и внутри онаго написанныхъ, полагая вмѣсто n безпрерывно числа 3, 4, 5, 6, и проч.

106. Положимъ для примѣра, что окружность круга раздѣлена на 10800 равныхъ частей, тогда бока написаннаго многоугольника, какъ въ кругѣ, такъ и около круга для чрезвычайной своей малости будутъ равны между собою; слѣд: положивъ $n=10800$, получимъ

$$AB = MN = 2r \sin. \frac{180^\circ}{10800} = 2r \operatorname{tg.} \frac{180^\circ}{10800} = 0.0005817764r.$$

Но поелику синусъ дуги или угла, какъ то изъ чертежа ясно видѣшь можно, есть половина хорды стягивающей удвоенную дугу, то бокъ АВ раздѣливъ на 2 и положивъ $r=1$, получимъ синусъ угла $\frac{180^\circ}{10800}$ или синусъ 1 минушъ $= 0.0002908882$, кошорой отъ самой дуги чувствительного разнишься не можетъ; слѣд: и самая дуга одной минушъ будетъ $= 0.0002908882$. Помноживъ сію дугу на 90° или на 5400 минушъ, получимъ дугу въ четверть окружности $= 1.5707963$, кошорую помноживъ еще на 2, получимъ полу-

вину

вину окружности круга или букву выше сего употребляемую $\pi = 3.1415926$, гдѣ всѣ 7 десятичныхъ дроби съ истинными согласуются. Махинъ же Агличанинъ положиъ, какъ и мы сдѣлали, діаметръ круга $= 1$, изчислилъ содержаніе діаметра къ окружности до 100 десятичныхъ цифръ, къ коимъ г. Логги присовокупилъ еще 27. И такъ содержаніе діаметра къ окружности изобразится слѣдующимъ образомъ: 3.141592653589793238462643383279502884971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679100821480865132723066470938446+

Хотя ошибку въ 127 цифръ сихъ десятичныхъ дробей учиненную вообразить не можно; однако въ смыслѣ Геометрическомъ выраженіе сіе окружности круга за истинное не принимаютъ: по сему требуется такое число, которое бы состояло изъ немногихъ цифръ, и при томъ изображало бы точно содержаніе діаметра къ окружности. Надъ симъ трудились древніе, да нѣкоторые и изъ новѣйшихъ прилагаютъ такъ же стараніе разрѣшить сію задачу извѣстную подъ именемъ *квадратуры круга*; однако всѣ труды шаковыхъ искашелей квадратуры круга по сіе время тщетны оказались.

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ.

ГЛАВА I.

О шарѣ или сферѣ и сѣченіи онаго.

1. Изъ Геометріи извѣстно, что полукружіе обра-
хъ около своего неподвижнаго поперешника до шѣхъ порѣ,
пока не придетъ на то мѣсто, откуда оборачиваться спа-
ло, описываемъ шѣло шаромъ или сферою называемое.
Въ немъ неподвижный центръ полукружія называется *цен-*
тромъ или *средоточіемъ* шара; линіи изъ центра къ по-
верхности проведенныя называются *радіусами* или *полу-*
поперешниками; линіи же чрезъ центръ шара проходящія
и пересѣкающія поверхность онаго въ двухъ точкахъ име-
нуются *діаметрами* или *поперешниками*.

2. Изъ произхожденія шара слѣдуетъ очевидно, что
всѣ линіи изъ центра къ поверхности шара проведенныя,
или радіусы шара, такъ какъ и въ кругѣ, бываютъ равны
между собою, и что сѣченіе сдѣланное по діаметру шара
раздѣляетъ его на двѣ равныя части.

3. Если шаръ пересѣется какою ни есть плоско-
стію, то сѣченіе будетъ кругъ.

Доказательство. Положивъ сѣ начала, что сѣченіе Черт:
ABD проходитъ чрезъ центръ шара С, ясно понять можно, 1.
что линіи изъ центра С къ окруженію сего сѣченія про-
веденныя СА, СВ, CD бываютъ равны между собою, и
равны радіусу шара; слѣдственно всѣ точки А, В, D и
проч. находясь на окружности круга, коего центръ С.
Но если шаръ пересѣется плоскостію EFN чрезъ центръ
его непроходящею, тогда изъ центра С къ плоскости
EFN проведи перпендикуляръ CG, такъ же точки F, H и С
соедини линіями CF, CH. Что сдѣлавъ получимъ
 $CG^2 + FG^2 = CF^2$ и $CG^2 + GH^2 = CH^2$; но $CF = CH$ радіусы
шара, слѣд: $CG^2 + FG^2 = CG^2 + GH^2$ или $FG = GH$.

Еще изъ сего видно, что сѣченіе шаръ по плоскости, не проходящей чрезъ центръ, будетъ кругъ.

Но поелику равенство сѣе всегда случается, гдѣ бы точка **Г** взята ни была; по слѣдуетъ, что окруженіе сѣченія есть кругъ, коего центръ **Г**, а радіусъ **ГН**.

4. Круги, коихъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара, бывають равны между собою, и при томъ болѣе всѣхъ тѣхъ, коихъ плоскости чрезъ центръ шара не проходятъ.

Доказательство. Положимъ, что одно какое ни есть сѣченіе **ABD** проходитъ чрезъ центръ шара **С**, тогда радіусъ его **CD** равенъ будетъ радіусу шара, и слѣд: всѣхъ такихъ круговъ радіусы будутъ равны между собою, такъ же какъ и самые круги. Въ каждомъ же другомъ кругѣ, коего плоскость чрезъ центръ шара не проходитъ, радіусъ **ГН** будетъ менѣе радіуса шара **СН**; ибо $СН^2 = СГ^2 + ГН^2$ слѣд: **СН** больше, нежели **ГН**.

5. Поелику шѣ круги, коихъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара, бывають болѣе всѣхъ тѣхъ, коихъ плоскости чрезъ центръ шара не проходятъ, по сего для называются они *большими кругами шара*.

6. Всѣ большіе круги разсѣкають себя на двѣ равныя части, и общее сѣченіе ихъ плоскостей есть діаметръ шара.

Доказательство. Поелику плоскости всѣхъ сихъ круговъ проходятъ чрезъ центръ шара, по они параллельны бытъ не могутъ; по чему пересѣкутъ себя взаимно на нѣкоторой прямой линіи, которая проходитъ такъ же чрезъ центръ шара: но линія чрезъ центръ проходящая и пересѣкающая поверхность въ двухъ точкахъ называется діаметръ шара; слѣдственно діаметръ есть общее сихъ круговъ сѣченіе, и раздѣляетъ ихъ на двѣ равныя части.

7. Чрезъ каждыя двѣ точки на поверхности шара взятые можно провести большой кругъ, и чрезъ каждую точку провести можно большой кругъ перпендикулярно къ данному другому большому кругу.

Доказательство. Если данныя двѣ точки и центръ шара соединятся прямыми линіями, по произшедшій опшуда

шуда преутольникъ находится будетъ на одной плоскости, чрезъ которую если пересѣчется шаръ, сѣченіе будетъ большой кругъ, и пройдетъ чрезъ данныя двѣ точки. Но поелику изъ данной точки можно опустить перпендикуляръ на плоскость даннаго большого круга, то по соединеніи концовъ сего перпендикуляра съ центромъ шара произойдетъ преутольникъ на одной плоскости лежащій, чрезъ которую сдѣланное сѣченіе будетъ большой кругъ, и при томъ перпендикуляренъ къ данному большому кругу.

8. Діаметръ шара перпендикулярный къ плоскости круга, произшедшаго отъ сѣченія шара, называется *осью*, а концы сего оси именуются *полюсами*. Такъ Pp есть ось круговъ EFH и ABD , а точки P, p полюсы.

9. *Всѣ точки окружности какого ни есть круга на поверхности шара отстоятъ на равныя дуги большихъ круговъ отъ своего полюса.*

Доказатъ: Возми какія ни есть двѣ точки, напр: F, H , и проводи чрезъ нихъ и полюсъ P большіе круги PHp и PFp , такъ же пропани радіусы HC, FC, HG, FG ; тогда въ преутольникахъ CGF и CGH для равенства всѣхъ боковъ будутъ и углы при C равны между собою; и слѣд: самыя дуги PH и PF будутъ такъ же равны между собою.

10. *Большой кругъ отъ каждаго своего полюса отстоитъ на четверть большаго круга, такъ же кругъ, коего какая ни есть точка отстоитъ отъ полюса на четверть круга, есть большой.*

Доказатъ: Если кругъ большой будетъ ABD , то пройдетъ онъ чрезъ C , и радіусы CB, CD , кои суть сѣченія съ плоскостями PFp и PHp , будутъ перпендикулярны къ оси PCp , которая сама по §. 8 перпендикулярна ко всей плоскости ABD , и слѣд: какъ дуги PB, PD , такъ и дуги pB, pD будутъ четверти окружности круга.

Но если кругъ, какъ EFH , будетъ, не самой большой, то плоскость его не пройдетъ чрезъ центръ C , слѣд:

пересѣкши шаръ чрезъ центръ плоскостію ABD параллельною съ плоскостію EFG , будутъ PB , PD , pB , pD четверти окружности круга, PF , PH ихъ меньше, а pF и pH больше. Изъ сего слѣдуетъ очевидно, что кругъ, коего почка какая нибудь отъ полюса отстоитъ на четверть круга, будетъ наибольшій.

11. Уголъ сферическій называется тотъ, который на поверхности шара содержится между двумя дугами большихъ круговъ взаимно себя пересѣкающихъ: за мѣру же сего угла берется уголъ прямолинейный, произшедшій отъ прямыхъ линій лежащихъ съ боками угла сферическаго на однихъ плоскостяхъ, и пересѣкающихъ себя взаимно въ самой ихъ пересѣчкѣ: такъ FRH есть уголъ сферической, вмѣсто коего берется уголъ прямолинейный fPh произшедшій отъ линій касательныхъ Pf и Ph .

12. *Ежели дуга угла идетъ на другую, то составитъ два угла, или два прямыхъ, или равные двумъ прямымъ.*

Доказательство. Сіе предложеніе само по себѣ очевидно; ибо касательная линія fP съ касательною линіею ePh дѣлаетъ два угла, или два прямыхъ, или равные двумъ прямымъ.

13. *Ежели два бока угла сферическаго чрезъ верхъ его продолжатся, то углы накрестъ лежащіе будутъ равны между собою.*

Доказательство. Ибо, если касательныя линіи fP и hP продолжатся чрезъ верхъ P , то углы при верху накрестъ стоящіе будутъ равны между собою.

14. *Ежели плоскости боковъ будутъ между собою перпендикулярны, то уголъ будетъ прямой; и обратно, если уголъ будетъ прямой, то плоскости будутъ перпендикулярны.*

Доказательство. Если плоскость FRp будетъ перпендикулярна къ плоскости HRp , то касательная линія fP перпендикулярна къ діаметру Pp общему сихъ плоскостей сѣченію, будетъ перпендикулярна ко всей плоскости HRp ,

HPp , и слѣд: такъ же къ касательной линіи Rh . Если же касательная fP будетъ перпендикулярна къ касательной Rh , и поелику она такъ же перпендикулярна къ діаметру Pp , то будетъ она перпендикулярна и ко всей плоскости HPp ; слѣд: плоскость FPp будетъ къ ней такъ же перпендикулярна.

15. *Если изъ какой нисть точки діаметра шара проходящаго чрезъ верхъ угла проведутся на плоскостяхъ самыхъ дугъ двѣ линіи къ діаметру перпендикулярныя, то уголъ прямолинейный равенъ будетъ сферическому.*

Доказательство. Если такія линіи будутъ GF и GH , то будутъ онѣ параллельны съ линіями Pf и Ph къ діаметру Pp перпендикулярными; по чему уголъ FGH будетъ равенъ углу fPh .

16. *Мѣра угла сферическаго есть дуга круга имѣющаго полюсъ въ верху его, и содержащагося между его боками.*

Доказательство: Пересѣкши шаръ плоскостію ABD или EFH перпендикулярною къ діаметру Pp , общему сѣченію плоскостей дугъ BP и PD , сѣченіе будетъ кругъ имѣющій полюсъ P , коего дуга BD или FH содержащаяся между боками PF и PH будетъ мѣра угла BCD или FGH , который находясь между радіусами BC , CD или FG , GH перпендикулярными къ діаметру Pp , который будетъ такъ же перпендикуляренъ къ плоскости ABD или EFH , равняется углу сферическому FPH .

17. *Если сферическаго угла бока продолжатся, то они пересѣкутъ себя такъ, что составятъ полукружіе, и при томъ новолпроизшедшій оттуда уголъ сферическій равенъ будетъ прежнему.*

Доказательство. Поелику PCp есть діаметръ обѣихъ дугъ PF и PH ; то какъ одна, такъ и другая продолженная пройдетъ чрезъ точку p ; по чему PFp и PHp будутъ полуокружія; угловъ же FPH и FPH общая мѣра будетъ дуга BD или FH .

18. Большой круг перпендикулярный къ другому большому кругу проходитъ чрезъ его полюсы, и если большой кругъ проходитъ чрезъ полюсъ другаго большаго круга, то онъ будетъ къ нему перпендикулярнымъ.

Доказательство. Если большой кругъ PBr перпендикуляренъ къ большому кругу ABD , то плоскость PBr будетъ перпендикулярна къ плоскости ABD ; по чему, если шаръ пересѣчется плоскостію $APDr$ чрезъ центръ C проходящею и перпендикулярною къ плоскости ABD , то сѣченіе PCr будетъ къ ней такъ же перпендикулярно; и слѣд: точки P, p находящіяся на кругѣ PBr будутъ полюсы круга ABD . Ежели же большой кругъ PBr проходитъ чрезъ полюсъ P большаго круга ABD , то онъ пройдетъ такъ же чрезъ его ось PCr , къ большому кругу перпендикулярную, и слѣд: будетъ къ ней такъ же перпендикуляренъ.

ГЛАВА II.

О Сферическихъ треугольникахъ.

19. Сферическимъ треугольникомъ называется шомъ, который содержится на поверхности шара между тремя дугами большихъ круговъ, кои его боками именуются. Но что здѣсь одни только большіе круги берутся въ разсужденіе, причина тому та, что меньшіе круги не всѣ одинакой величины, но различными радіусами описываются; при шомъ ихъ плоскости не всегда одну ось пересѣкаютъ, и центръ ихъ не всегда одинъ бываетъ, какъ то съ большими кругами случается, ибо они всегда чрезъ центръ шара проходятъ: знаніе же разрѣшаетъ Сферическіе Треугольники, или изъ трехъ данныхъ частей Сферическаго треугольника находить прочіе, называется Сферическою Тригонометрією.

20. Во всякомъ треугольникѣ одинъ бокъ бываетъ всегда меньше суммы двухъ прочихъ.

Доказат: Истинна сего предложенія столь очевидна, что никакого не требуетъ доказательства.

21. Всякой бокъ Сферическаго треугольника бываетъ всегда меньше полуокружности круга. Черт: 2.

Доказат: Продолжи бока АВ и АС, пока не сойдутся въ точкѣ D. Продолжи такъ же бока ВА и ВС, пока взаимно себя не пересѣкутъ въ точкѣ E. Поелику бока треугольника суть дуги большихъ круговъ шара, а ABD, ACD и BCE полуокружія, то слѣдуетъ, что АВ, АС и ВС меньше полуокружности.

22. Сумма трехъ сторонъ Сферическаго треугольника бываетъ всегда меньше 360 градусовъ, или цѣлой окружности круга.

Доказательство. Продолжи бока АВ и АС, пока не сойдутся въ точкѣ D; тогда дуги ACD и ABD будутъ полуокружности, § 17. Но $DC + BD > BC$. Придавъ съ обѣихъ сторонъ $AC + AB$ выйдетъ $AC + AB + DC + BD > AC + AB + BC$, то есть, два полуокружія ACD и ABD вмѣстѣ взятыя, или 360 градусовъ бывающъ больше трехъ боковъ АС, АВ и ВD вмѣстѣ взятыхъ.

23. Если изъ трехъ угловъ А, В, С сферическаго Черт: 3. треугольника, какъ полюсовъ, опишутся три дуги FE, FD и DE, кои составятъ новый треугольникъ FDE; тогда каждой бокъ новаго треугольника DEF, будетъ дополненіе того угла, изъ котораго онъ какъ изъ полюса описанъ; и каждой уголъ новаго треугольника будетъ дополненіе противолежащаго бока треугольника ABC.

Доказательство. Поелику А есть полюсъ дуги FGHE, то разстояніе почекъ А и E будетъ равно 90° , § 10; и поелику С есть полюсъ дуги DNME, то разстояніе почекъ С и E будетъ такъ же равно 90° ; слѣд: E есть полюсъ дуги NACG. Равнымъ образомъ докажемъ, что F есть полюсъ дуги IABH, а D полюсъ дуги MBCL. Поелику дуги FI, и LD четверти круга, то будетъ $DL + FI$

$FI=180^\circ$ или $DL+FL+LI=180^\circ$ или $DF+LI+180^\circ$; слѣд: DF есть дополненіе дуги LI . Но LI имѣя полюсъ B будетъ мѣра угла ABC , по чему DF будетъ такъ же дополненіе угла ABC . Равнымъ образомъ докажется, что дуга GH мѣра угла A есть дополненіе дуги FE , а дуга NM мѣра угла C есть дополненіе дуги DE . Сверхъ сего, какъ дуга BI , такъ и AN суть четверти круга, то общая ихъ часть AB будетъ дополненіе дуги $IABN$, коею измѣряется уголъ F . Равнымъ образомъ дуга AC будетъ дополненіе угла E , а BC дополненіе угла D до 180 градусовъ.

24. Сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника бываетъ всегда больше 180° , а меньше 540° , или шести прямыхъ угловъ.

Доказательство. Поелику сумма трехъ угловъ треугольника ABC вмѣстѣ съ суммою трехъ боковъ треугольника DEF составляетъ $3. 180^\circ$ или 540° , §. 23, то слѣдуетъ 1е. что сумма трехъ угловъ A , B , C меньше нежели $3. 180^\circ$ или 540° . 2е. Сумма трехъ боковъ EF , DF , DE меньше, нежели 360° , §. 22; слѣд: останется больше 180 для суммы трехъ угловъ A , B , C .

25. И такъ сферической треугольникъ можетъ имѣть три угла прямыхъ, и такъ же три угла тупыхъ; слѣдственно изъ двухъ данныхъ угловъ сферическаго треугольника не можно заключать о третьемъ, какъ то въ прямоугольныхъ треугольникахъ.

26. Два сферическихіе треугольника бываютъ равны между собою. 1е. Когда три бока одного треугольника равны всѣмъ тремъ бокамъ другаго треугольника, какъ
 Черт: 4. дой каждому. 2е. Когда два бока равныя уголъ равной заключаютъ. 3е. Если два угла при одинакой сторонѣ лежащіе равны между собою. 4е. Когда есть три угла одного треугольника равны тремъ угламъ треугольника.

Доказательство. Первые три случая доказываются такъ же, какъ въ Геометріи показывается равенство треугольниковъ: что же касается до четвертаго случая, то

можно доказать его слѣдующимъ образомъ: Здѣлай для каждаго треугольника ABC и abc дополнительной треугольникъ DEF и def , такъ какъ въ § 24 показано; тогда для равенства угловъ A, B, C и a, b, c стороны EF, DF , и DE дополненія первыхъ угловъ равны будущъ сторонамъ ef, df, de дополненіямъ послѣднихъ, слѣд: по первому изъ сихъ четырехъ случаю сии два треугольника DEF и def будутъ совершенно между собою равны; такъ же углы D, E, F , будутъ равны угламъ d, e, f каждой каждому, и при томъ стороны BC, AC, AB дополненія прехъ первыхъ угловъ равны сторонамъ bc, ac, ab дополненіямъ прехъ послѣднихъ.

28. Во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ ABC два угла B и C равны, и сторонамъ AC и AB противолежащія равны между собою; и если въ треугольникѣ два угла B и C равны, то и стороны AC и AB равны, и угламъ противолежащія равны будутъ между собою. Черт. 5.

Доказательство. Возми на AB и AC равныя дуги AE и AD и проводи BD и EC . Сдѣлавъ сие явствуетъ, что треугольники ABD и AEC равны, ибо бока AE, AC, AD, AB равны заключающъ уголъ A общей, и слѣд: такъ же $BD=EC$. По томъ изъ AB и AC по положенію равныхъ отнявъ AE и AD останется $EB=DC$: но BC есть бока общій треугольниковъ EBC и DCB ; слѣдственно тогда три бока равны тремъ бокамъ каждой каждому, что и сходственные углы B и C равны будутъ между собою.

2. Если уголъ B равенъ углу C , то будетъ $AB=AC$; ибо взявъ $EB=DC$ и протянувъ опять дуги BD, EC треугольники ECB и BDC будутъ равны; ибо бока EB, BC, DC, BC заключающъ углы B и C по положенію равны; слѣд: 1е $EC=BD$, 2е $DBC=ECB$; такъ же дополнение угла BDA равно будетъ дополненію угла CEA . 3е $DBC=ECB$, откуда для $EBC=DCB$ по положенію будетъ такъ же $ECA=DBA$. И такъ въ треугольникахъ ADB, AEC бока BD, EC и углы противолежащія ADB, AEC равны угламъ AEC и ACE , при томъ прехей уголъ

Ж

А

А обоимъ преугольникамъ общій; слѣдственно преуголь-
ники равны между собою и бокъ $AE =$ боку AD ; придавъ
же равныя части EB , DC выйдетъ $AEB = ADC$.

29. Изъ сего слѣдуетъ очевидно, что преугольникъ
равноугольный бываетъ вмѣстѣ равностороннымъ, и об-
ратно.

30. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC бокъ
Черт. 6. BC углу большому A противолежащій бываетъ больше;
а AC углу меньшому B противоположенный меньше.

Доказательство: Когда уголъ A больше угла B по
положенію, то сдѣлавъ $DAB = DBA$ выйдетъ $AD = BD$
и $AD + CD = BD + CD$; но $AD + CD > AC$; слѣд. $BD + CD$
или бокъ BC углу большому A противолежащій бываетъ
больше бока AC углу меньшому B противоположенного.

ГЛАВА III.

О разрѣшеніи сферическихъ треугольниковъ.

31. Всякой сферической преугольникъ, такъ какъ и
прямоугольной, составляющъ шесть частей, коими онъ
опредѣляется, а именно три бока и три угла. Изъ Гео-
метріи извѣстно, что три части преугольника должны
быть даны, чтобъ можно было оной начертить; слѣдственно
и здѣсь три части сферическаго преугольника должны
быть извѣстны, чтобъ ийти прочія его части. Наука же,
учащая изъ данныхъ трехъ частей сферическаго преуголь-
ника находить чрезъ выкладки прочія его части, называется
сферическою тригонометрією. Разрѣшимъ съ начала
прямоугольные сферическіе преугольники, а по томъ уже
приступимъ къ разрѣшенію преугольниковъ вообще, такъ
же какъ и въ плоской поступали тригонометріи.

32. Пусть будетъ DAB сферической преугольникъ,
когого уголъ A прямой. Изъ дуги AD сдѣлай цѣлой кругъ,
Черт. 7. которой продолженные бока AB и BD пересѣкутъ въ точ-
кахъ E и F , такъ что ABE и DBF будутъ полукружія,

а ACE и DCF діаметры. По томъ проводи BC и BI перпендикулярно къ плоскости ACE, которая къ діаметру AE будетъ такъ же перпендикулярна въ точкѣ I. Послѣ сего просяни IG и BG перпендикулярно къ діаметру DCF. Что сдѣлавъ, плоскость BIG будетъ перпендикулярна къ плоскости GIC; слѣд: CG перпендикулярна къ плоскости BIG, ибо она перпендикулярна къ сѣченію IG плоскостей IGB, IGC между собою перпендикулярныхъ. Сверхъ сего пересѣки полукружія DAF, DBF на двѣ равныя части въ L и H, и проводи чрезъ L и H дугу большаго круга пересѣкающую полкруга ABE въ точкѣ P; тогда углы DHL, DLH будутъ прямые, и слѣд: D полюсъ круга LPH, а LH мѣра угла ADB; такъ же для угла LAP прямого будетъ P полюсъ круга AL; PA, PL четверти круга, а AL мѣра угла BPH.

33. И такъ разрѣшеніе всякаго сферическаго прямоугольнаго треугольника зависить отъ разсмотрѣнія пирамиды, коея верхъ C, а основаніе BIG, и отъ сравненія сферическаго треугольника BAD имѣющаго при A уголъ прямой съ треугольникомъ BHP прямоугольнымъ при H. Всѣ стороны пирамиды суть прямоугольные треугольники; ибо углы BIG, BIC прямые для BI перпендикулярной ко всей плоскости GIC, уголъ IGC прямой по положенію, а BGC по прежнему §. Сферическаго же треугольника PHB будетъ бока $BH = 90^\circ - DB$; $BP = 90^\circ - AB$, $HP = 90^\circ - HL$ мѣра угла BDA; угла BPH мѣра, дуга AL есть дополненіе бока AD; углы же B на крестѣ лежащіе равны между собою.

34. Поелику въ пирамидѣ углы BGC, BIC прямые, то BG, BI будутъ синусы угловъ BCG, BCI или дугъ BD и AB къ радіусу $BC = 1$, и поелику такъ же уголъ BIG прямой, то будетъ $BG : BI = 1 : \sin. BGI$ или $\sin. BD : \sin. AB = 1 : \sin. ADB$ противолежащему сторонѣ AB. Равнымъ образомъ будетъ $\sin. BD : \sin. AD = 1 : \sin. ABD$ слѣд: въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ радіусъ содержишся къ синусу угла, какъ синусъ основанія къ синусу бока шому углу противолежащаго.

35. Взявъ теперь CG за радіусъ, будутъ BG, GI тангенсы угловъ BCG, ICG или дугъ BD, AD ради угловъ прямыхъ BGC, и IGC; но поелику уголъ BIG прямой, то выйдетъ $BG : GI = 1 : \sin. GBI = 1 : \cos. G = 1 : \cos. D$, при которомъ уголъ D лежитъ сторона AD, или $\operatorname{tg} BD : \operatorname{tg} AD = 1 : \cos. D$. Равнымъ образомъ получимъ $\operatorname{tg} BD : \operatorname{tg} AB = 1 : \cos. B$. Изъ сего слѣдуетъ, что радіусъ содержится къ косинусу угла такъ, какъ тангенсъ основанія къ тангенсу бока подлежащаго.

36. Для угловъ прямыхъ CGI, CIB будетъ IG синусъ угла ICG или дуги AD; IB тангенсъ угла ICB или дуги AB къ радіусу $CI = 1$; и поелику уголъ BIG прямой, то выйдетъ $GI : IB = 1 : \operatorname{tg} BGI = 1 : \operatorname{tg} D$, коему углу D подлѣжитъ DA, а противолѣжитъ AB, или $\sin. AD : \operatorname{tg} AB = 1 : \operatorname{tg} D$; такъ же получимъ $\sin. AB : \operatorname{tg} AD = 1 : \operatorname{tg} B$. Слѣд: радіусъ содержится къ тангенсу угла, какъ синусъ бока подлежащаго къ тангенсу бока противоположащаго.

37. Изъ треугольника BPH по § 34 получимъ $\sin. HP : \sin. BH = 1 : \sin. HPB$; но $HP = 90 - HL$ и $BH = 90 - DB$. (§ 33.) Слѣд: $\cos. HL : \cos. DB = 1 : \sin. HPB$, поелику HPB есть дополненіе бока AB, а HL или AB мѣра угла ADB, то вмѣсто HL поставивъ AB получимъ $\cos. AB : \cos. DB = 1 : \cos. AB$, или радіусъ содержится къ косинусу одного бока такъ, какъ косинусъ другого къ косинусу основанія.

38. Изъ того же § 34 слѣдуетъ $\sin. BP : \sin. HP = 1 : \sin. PBH = 1 : \sin. ABD$; но $\sin. BP = \sin. (90 - AB) = \cos. AB$, а $\sin. HP = \sin. (90 - HL) = \cos. HL = \cos. D$, ибо HL есть мѣра угла D; слѣд: одно вмѣсто другого взять можно. По сему выйдетъ $\cos. AB : \cos. D = 1 : \sin. ABD$ или $\cos. AD : \cos. B = 1 : \sin. ADB$; слѣдовательно радіусъ содержится къ синусу угла подлежащаго, какъ косинусъ бока къ косинусу угла противоположащаго.

39. Наконецъ по § 36 получимъ $\sin. BH : \operatorname{tg} HP = 1 : \operatorname{tg} HBP = 1 : \operatorname{tg} ABD$; но $\sin. BH = \sin. (90 - DB) = \cos. DB$

ДВ и $\operatorname{tg} \text{HP} = \operatorname{tg} (90^\circ - \text{HL}) = \cot. \text{HL} = \cot. \text{D}$ (§. 38). Слѣд: получимъ $\cot. \text{DB} : \cot. \text{D} = 1 : \operatorname{tg} \text{ABD}$. Изъ сего слѣдуетъ, что радиусъ содержится къ тангенсу одного угла, такъ какъ косинусъ основанія къ котангенсу другого угла.

40. Изъ вышеобъявленныхъ предложеній слѣдуетъ, что въ треугольникѣ сферическомъ АРМ прямоугольномъ при Р положивъ радиусъ или синусъ дѣлой $= 1$, и назвавъ $\text{AP} = x$; $\text{PM} = y$; $\text{AM} = s$, углы $\text{PAM} = \zeta$; $\text{AMP} = \theta$ и APM Черт. 8. $= 90^\circ$, получимъ

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad \sin. y = \sin. \zeta \sin. s \\ \text{II.} \quad \sin. x = \sin. \theta \sin. s \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array}} \right\} \S. 34.$$

$$\begin{array}{l} \text{III.} \quad \operatorname{tg.} x = \cot. \zeta \operatorname{tg.} s \\ \text{IV.} \quad \operatorname{tg.} y = \cot. \theta \operatorname{tg.} s \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{III.} \\ \text{IV.} \end{array}} \right\} \S. 35.$$

$$\begin{array}{l} \text{V.} \quad \operatorname{tg.} x = \sin. y \operatorname{tg.} \theta \\ \text{VI.} \quad \operatorname{tg.} y = \sin. x \operatorname{tg.} \zeta \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{V.} \\ \text{VI.} \end{array}} \right\} \S. 36.$$

$$\text{VII.} \quad \cot. s = \cot. x \cot. y \quad \S. 37.$$

$$\text{VIII.} \quad \cot. \theta = \sin. \zeta \cot. x \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{VIII.} \\ \text{IX.} \end{array}} \right\} \S. 38.$$

$$\text{IX.} \quad \cot. \zeta = \sin. \theta \cot. y$$

$$\text{X.} \quad \cot. s \operatorname{tg.} \zeta = \cot. \theta \text{ или } \cot. s \operatorname{tg.} \zeta \operatorname{tg.} \theta = 1, \text{ положивъ } \frac{1}{\operatorname{tg.} \theta} \text{ вмѣсто } \cot. \theta. \quad \S. 39.$$

Посредствомъ сихъ десяти уравненій, изъявляющихъ свойства прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, можно разрѣшить всѣ возможные вопросы касающіеся до сихъ треугольниковъ; ибо изъ данныхъ двухъ (положивъ радиусъ или синусъ дѣлой равенъ единицѣ) всегда найдется шестіе:

41. Приспустимъ теперь къ разрѣшенію какихъ нѣсть треугольниковъ сферическихъ, изъ коихъ пусть будетъ одинъ АВС. Въ немъ положивъ $\text{AB} = c$; $\text{Ac} = b$ и Черт. 9. $\text{Bc} = a$, проведемъ изъ А перпендикуляръ AD и назовемъ $\text{BD} = m$; $\text{DC} = n$ и углы $\text{BAD} = \theta$ и $\text{DAC} = \zeta$. Что сдѣлавъ, изъ треугольниковъ прямоугольныхъ ABD и ADC получимъ $\sin. \text{AD} = \sin. \text{B} \sin. c = \sin. \text{C} \sin. b$, откуда слѣ-

дуетъ $\sin. B : \sin. C = \sin. b : \sin. c$; равнымъ образомъ вый-
детъ $\sin. B : \sin. A = \sin. b : \sin. a$ или
 $\sin. C : \sin. A = \sin. c : \sin. a$.

Слѣдственно, во всякомъ сферическомъ треугольникѣ синусы боковъ содержащяся такъ, какъ синусы угловъ бокамъ противоположащихъ.

42. По томъ изъ тѣхъ же прямоугольныхъ треуголь-
никовъ получимъ

$$\cos. AD = \frac{\cos. B}{\sin. \theta} = \frac{\cos. C}{\sin. \zeta} \text{ или } \frac{\sin. \zeta}{\sin. \theta} = \frac{\cos. C}{\cos. B}.$$

Но $\zeta = A - \theta$; слѣд: $\sin. \zeta = \sin. A \cos. \theta - \cos. A \sin. \theta$
что вмѣсто $\sin. \zeta$ поставивъ получимъ

$$\frac{\sin. A \cos. \theta}{\sin. \theta} - \cos. A = \frac{\cos. C}{\cos. B}. \text{ Поелику } \frac{\cos. \theta}{\sin. \theta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$\text{и } \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos. c \operatorname{tg} B} \quad (\S 40), \text{ то выйдетъ}$$

$$\sin. A \cos. c \operatorname{tg} B - \cos. A = \frac{\cos. C}{\cos. B}, \text{ или помноживъ на}$$

$$\cos. B \text{ и для } \operatorname{tg} B \cos. B = \sin. B, \text{ получимъ}$$

$$\cos. C = \sin. A \cos. c \sin. B - \cos. A \cos. B; \text{ равнымъ обра-}$$

$$\cos. B = \sin. A \cos. b \sin. C - \cos. A \cos. C \text{ и}$$

$$\cos. A = \sin. B \cos. a \sin. C - \cos. B \cos. C.$$

43. Поелику изъ тѣхъ же прямоугольниковъ прямо-
угольныхъ ABD и ADC по формуламъ въ § 40 найденнымъ
слѣдуетъ

$$\cos. AD = \frac{\cos. c}{\cos. m} = \frac{\cos. b}{\cos. n} \text{ или } \frac{\cos. n}{\cos. m} = \frac{\cos. b}{\cos. c}, \text{ то}$$

$$\text{для } n = a - m \text{ и } \cos. n = \cos. a \cos. m + \sin. a \sin. m$$

$$\text{получимъ } \cos. a + \frac{\sin. a \sin. m}{\cos. m} = \frac{\cos. b}{\cos. c}. \text{ Но } \frac{\sin. m}{\cos. m} = \operatorname{tg} m, \text{ а}$$

$$\operatorname{tg} m = \cos. A \operatorname{tg} c. (\S 40.) \text{ Слѣд: } \cos. a + \cos. A \sin. a \operatorname{tg} c = \frac{\cos. b}{\cos. c}$$

$$\text{помноживъ на } \cos. c \text{ и для } \operatorname{tg} c. \cos. c = \sin. c, \text{ получимъ}$$

$$\cos. a \cos. c + \cos. A \sin. a \sin. c = \cos. b. \text{ Равнымъ обра-}$$

$$\text{зомъ опустивъ перпендикуляръ изъ верху угла B или C}$$

$$\text{получимъ}$$

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \cos. A \sin. b \sin. c \text{ и}$$

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \cos. C \sin. a \sin. b.$$

44. Изъ треугольниковъ прямоугольныхъ ABD и ADC слѣдуютъ $\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} c \operatorname{cof.} \theta = \operatorname{tg} b \operatorname{cof.} \zeta$, или $\frac{\operatorname{cof.} \zeta}{\operatorname{cof.} \theta} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b}$, откуда для $\zeta = A - \theta$ и $\operatorname{cof.} \zeta = \operatorname{cof.} A \operatorname{cof.} \theta + \sin. A \sin. \theta$ получимъ $\operatorname{cof.} A + \sin. A \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b}$. Но $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{cof.} c}$

(§ 40), слѣдственно выйдетъ

$$\operatorname{cof.} A \operatorname{tg} B \operatorname{cof.} c \operatorname{tg} b = \sin. c \operatorname{tg} B - \sin. A \operatorname{tg} b;$$

равнымъ образомъ получимъ

$$\operatorname{cof.} B \operatorname{tg} C \operatorname{cof.} a \operatorname{tg} c = \sin. a \operatorname{tg} C - \sin. B \operatorname{tg} c$$

$$\operatorname{cof.} C \operatorname{tg} A \operatorname{cof.} b \operatorname{tg} a = \sin. b \operatorname{tg} A - \sin. C \operatorname{tg} a$$

45. Посредствомъ выведенныхъ въ § 41, 42, 43, 44 формулъ можно разрѣшить всѣ задачи до треугольниковъ сферическихъ касающіяся; ибо по даннымъ тремъ всегда найти можно четвертое, какъ то изъ слѣдующихъ предположеній видно будетъ.

46. Въ сферическомъ треугольникѣ даны три стороны, найди углы.

Рѣшеніе. Положимъ въ сферическомъ треугольникѣ ABC три стороны $AB = c$; $AB = b$ и $BC = a$, изъ § 43 получимъ

$$\operatorname{cof.} A = \frac{\operatorname{cof.} a - \operatorname{cof.} b \operatorname{cof.} c}{\sin. b \sin. c}$$

$$\operatorname{cof.} B = \frac{\operatorname{cof.} b - \operatorname{cof.} a \operatorname{cof.} c}{\sin. a \sin. c}$$

$$\operatorname{cof.} C = \frac{\operatorname{cof.} c - \operatorname{cof.} a \operatorname{cof.} b}{\sin. a \sin. b}$$

47. Отсюда получимъ

$$1 - \operatorname{cof.} A = \frac{\sin. b \sin. c - \operatorname{cof.} a + \operatorname{cof.} b \operatorname{cof.} c}{\sin. b \sin. c}; \text{ Но}$$

$$\sin. b \sin. c + \operatorname{cof.} b \operatorname{cof.} c = \operatorname{cof.} (b - c) \text{ слѣд:}$$

$$1 - \operatorname{cof.} A = \frac{\operatorname{cof.} (b - c) - \operatorname{cof.} a}{\sin. b \sin. c}. \text{ Но вообще извѣстно, что}$$

$$\operatorname{cof.} p - \operatorname{cof.} q = 2 \sin. \frac{1}{2} (q - p) \sin. \frac{1}{2} (p + q) \text{ слѣд:}$$

$$1 - \operatorname{cof.} A = 2 \sin. \frac{1}{2} (a - b + c) \sin. \frac{1}{2} (a + b - c) \text{ Поелику}$$

$$1 - \operatorname{cof.} A = 2 \sin. \frac{1}{2} A^2, \text{ то выйдетъ}$$

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (a - b + c) \sin. \frac{1}{2} (a + b - c)}{\sin. b \sin. c}}$$

равнымъ

равнымъ образомъ выйдетъ

$$\sin. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (b-a+c) \sin. \frac{1}{2} (b+a-c)}{\sin. a \sin. c}}$$

$$\sin. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (c-a+b) \sin. \frac{1}{2} (c+a-b)}{\sin. b \sin. a}}$$

48. Придавъ единицу къ найденному косинусу получимъ:

$$1 + \cos. A = \frac{n. b \sin. c + \cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}; \text{ но } \sin. b \sin. c$$

— $\cos. b \cos. c = -\cos. (b+c)$ и $1 + \cos. A = 2 \cos. \frac{1}{2} A^2$; слѣдственно выйдетъ $2 \cos. \frac{1}{2} A^2 = \frac{\cos. a - \cos. (b+c)}{\sin. b \sin. c}$. Разрѣшивъ

числителя по формулѣ $\cos. p - \cos. q = 2 \sin. \frac{1}{2} (q-p) \sin. \frac{1}{2} (p+q)$ и извлекши корень квадратной получимъ

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (b+c-a) \sin. \frac{1}{2} (b+c+a)}{\sin. b \sin. c}}. \text{ Равнымъ об-}$$

разомъ выйдетъ:

$$\cos. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (a+c-b) \sin. \frac{1}{2} (a+c+b)}{\sin. a \sin. c}} \text{ и}$$

$$\cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (a+b-c) \sin. \frac{1}{2} (a+b+c)}{\sin. a \sin. b}}.$$

49. Отсюда получимъ мы тангенсы половинныхъ угловъ A, B и C:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (a-b+c) \sin. \frac{1}{2} (a+b-c)}{\sin. \frac{1}{2} (b+c-a) \sin. \frac{1}{2} (b+c+a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (b-a+c) \sin. \frac{1}{2} (b+a-c)}{\sin. \frac{1}{2} (a+c-b) \sin. \frac{1}{2} (a+c+b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (c-a+b) \sin. \frac{1}{2} (c+a-b)}{\sin. \frac{1}{2} (a+b-c) \sin. \frac{1}{2} (a+b+c)}}$$

50. Всѣ сии формулы весьма способны къ дѣланію выкладокъ посредствомъ логарисмовъ. Нашедъ же одинъ изъ трехъ угловъ, на примѣръ A, прочіе два удобно найдушся по § 41; ибо получимъ

$$\sin. B = \frac{\sin. b \sin. A}{\sin. a} \text{ и } \sin. C = \frac{\sin. c \sin. A}{\sin. a}, \text{ если только извѣ-}$$

стно, что сии углы больше или меньше угла прямого;
но

но употребляя найденныя формулы разрѣшается сіе сомнѣніе; ибо сыщется половина угловъ, которая бываетъ всегда меньше угла прямого.

51. Изъ тангенсовъ половинныхъ угловъ выходятъ такъ же формулы примѣчанія достойныя; ибо два изъ нихъ помноживъ между собою получимъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b-c)}{\sin \frac{1}{2} (a+b+c)} \quad \text{Но поелику}$$

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{1}{2} (p+q) \cos \frac{1}{2} (p-q) \text{ и} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{1}{2} (p-q) \cos \frac{1}{2} (p+q); \text{ по выйдемъ} \\ 1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a+b) \cos \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} (a+b+c)} \quad \text{и} \\ 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \frac{2 \cos \frac{1}{2} (a+b) \sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} (a+b+c)} \end{aligned}$$

52. Вычтя или сложивъ два изъ сихъ тангенсовъ получимъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \frac{(\sin \frac{1}{2} (a+c-b) \pm \sin \frac{1}{2} (b+c-a)) \sqrt{\sin \frac{1}{2} (a+b-c)}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} (b+c-a) \sin \frac{1}{2} (a+c-b) \sin \frac{1}{2} (a+b+c)}} \\ \text{или } \operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a+c-b) \pm \sin \frac{1}{2} (b+c-a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a+b+c)} \end{aligned}$$

поставивъ величину тангенса $\frac{1}{2} C$; разрѣшивъ же числителя по формуламъ Тригонометрическимъ въ § 51 упомянутымъ, выйдемъ

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \frac{2 \cos \frac{1}{2} (a-b) \sin c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a+b+c)} \quad \text{и} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} A - \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a+b+c)} \end{aligned}$$

$$53. \text{ Но поелику } \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+B) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B}$$

по изъ § 51 и 52 получимъ слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a+b)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+C) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a-c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a+c)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B+C) = \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} (b+c)}$$

54. Равнымъ образомъ для $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A - \operatorname{tg} \frac{1}{2} B}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B}$ выйдетъ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a+b)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-C) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a-c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} (a+c)} \quad \text{и} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B-C) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (b+c)} \end{aligned}$$

55. Въ треугольникѣ сферическомъ даны три угла; найти три стороны.

Рѣшеніе : Пусть будетъ ABC сферической треугольникъ, коего три угла даны A, B, C, а надлежитъ сыскашь три стороны AB=c; AC=b и BC=a. Тогда по § 42 получимъ

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \\ \cos b &= \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C} \\ \cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} \end{aligned}$$

56. Отсюда выходящія слѣдующія формулы:

$$1 - \cos a = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C}. \text{ Но}$$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2} (p+q) \cos \frac{1}{2} (p-q)$; слѣдственно получимъ

$$1 - \cos a = 2 \cos \frac{1}{2} (A+B+C) \cos \frac{1}{2} (B+C-A)$$

$$1 + \cos A = 2 \cos \frac{1}{2} (A+B-C) \cos \frac{1}{2} (A-B+C)$$

Но поелику $1 - \cos a = 2 (\sin \frac{1}{2} a)^2$ и $1 + \cos a = 2 (\cos \frac{1}{2} a)^2$; то выйдетъ

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (A+B+C) \cos \frac{1}{2} (B+C-A)}{\sin B \sin C}}$$

sin.

$$\sin \frac{1}{2} b = \frac{\sqrt{-\cos \frac{1}{2} (A+B+C) \cos \frac{1}{2} (A+C-B)}}{\sin A \sin C}$$

$$\sin \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{-\cos \frac{1}{2} (A+B+C) \cos \frac{1}{2} (A+B-C)}}{\sin A \sin B}$$

При семъ надобно примѣчать, что сумма угловъ $A+B+C$ всегда больше двухъ прямыхъ, а полусумма всегда больше угла прямого; слѣдственно косинусъ его отрицательную величину имѣетъ.

57. Для косинусовъ половины сторонъ получимъ

$$\cos \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos \frac{1}{2} (A+B-C) \cos \frac{1}{2} (A-B+C)}}{\sin B \sin C}$$

$$\cos \frac{1}{2} b = \frac{\sqrt{\cos \frac{1}{2} (B+A-C) \cos \frac{1}{2} (B-A+C)}}{\sin A \sin C}$$

$$\cos \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{\cos \frac{1}{2} (C+A-B) \cos \frac{1}{2} (C-A+B)}}{\sin A \sin B}$$

58. Изъ синусовъ и косинусовъ половины сторонъ весьма удобно можно вывести ихъ тангенсы; ибо получимъ,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{-\cos \frac{1}{2} (A+B+C) \cos \frac{1}{2} (B+C-A)}}{\cos \frac{1}{2} (B+A-C) \cos \frac{1}{2} (B-A+C)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{\sqrt{-\cos \frac{1}{2} (A+B+C) \cos \frac{1}{2} (A+C-B)}}{\cos \frac{1}{2} (B+A-C) \cos \frac{1}{2} (B-A+C)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{-\cos \frac{1}{2} (A+B+C) \cos \frac{1}{2} (A+B-C)}}{\cos \frac{1}{2} (C+A-B) \cos \frac{1}{2} (C-A+B)}$$

59. Помноживъ два изъ сихъ тангенсовъ между собою, получимъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{-\cos \frac{1}{2} (A+B+C)}{\cos \frac{1}{2} (A+B-C)} \quad \text{откуда слѣдующія двѣ}$$

произойдутъ формулы :

$$1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{2 \cos \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

$$1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{2 \sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

60. Но если сложимъ, или вычтемъ одну формулу изъ другой, то выйдемъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a + \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{(\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C-A) + \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C-B)) \sqrt{-\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B+C)}}{\sqrt{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)} \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C-B) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C-A)}$$

$$\text{Но поелику } \operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{-\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B+C)} \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (C+A-B) \operatorname{cof} \frac{1}{2} (C-A+B)};$$

по получимъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a + \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C-A) + \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C-B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

Сдѣлавъ по формуламъ для $\operatorname{cof} p + \operatorname{cof} p$ и $\operatorname{cof} p - \operatorname{cof} q$ найденнымъ приведеніе, выйдемъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a + \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{2 \operatorname{cof} \frac{1}{2} C \operatorname{cof} \frac{1}{2} (A-B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

$$\text{и } \operatorname{tg} \frac{1}{2} a - \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (A-B) \sin \frac{1}{2} C \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B-C)}$$

61. И такъ мы найдемъ, какъ и прежде

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A-B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+B)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a+c) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A-C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} b}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A+C)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b+c) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B-C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} a}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (B+C)}$$

62. Равнымъ образомъ тангенсы половины разности сторонъ будутъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} (A+B)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-c) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A-C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} (A+C)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b-c) = \frac{\sin \frac{1}{2} (B-C) \operatorname{tg} \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} (B+C)}$$

63. Въ сферическомъ треугольникѣ даны двѣ стороны съ угломъ между ними содержащимся; найти третью сторону и два протіе угла.

Рѣшеніе: Пусть будетъ ABC треугольникъ, въ коемъ даны двѣ стороны $AB = c$; $AC = b$ съ угломъ A, который между ими находится: пребудетъ сторона $BC = a$ и углы

углы В и С. На сей конецъ изъ § 43 получимъ
 $\cos. a = \cos. A \sin. b \sin. c + \cos. b \cos. c$: а изъ § 44 выйдетъ
 $\operatorname{tg} B = \frac{\sin. A \operatorname{tg} b}{\sin. c - \operatorname{tg} b \cos. c \cos. A}$ и

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin. A \operatorname{tg} c}{\sin. b - \operatorname{tg} c \cos. b \cos. A}.$$

Но выраженіе для косинусовъ будетъ гораздо способнѣе для вычисленія, шакъ что выйдутъ для рѣшенія слѣдующія формулы:

$$\cos. B = \frac{\sin. c \cos. b - \cos. c \cos. A \sin. b}{\sin. A}$$
 и

$$\cos. C = \frac{\sin. b \cos. c - \cos. b \cos. A \sin. c}{\sin. A}.$$

64. Поскольку $\cos. b \cos. c = \frac{1}{2} \cos. (b-c) + \frac{1}{2} \cos. (b+c)$ и $\sin. b \sin. c = \frac{1}{2} \cos. (b-c) - \frac{1}{2} \cos. (b+c)$ то косинусъ стороны a можетъ изобразиться чрезъ сложеніе и вычитаніе простыхъ косинусовъ слѣдующимъ образомъ:
 $\cos. a = \frac{1}{4} \cos. (A-b+c) + \frac{1}{4} \cos. (A+b-c) - \frac{1}{4} \cos. (A-b-c) - \frac{1}{4} \cos. (A+b+c) + \frac{1}{2} \cos. (b-c) + \frac{1}{2} \cos. (b+c).$

65. Но если желаешь употребить логарисмы, то сія формула советѣмъ къ тому не годится. Между тѣмъ можно употреблять и самые логарисмы, введши новой уголъ u ; ибо положивъ

$$\operatorname{tg} u = \frac{\cos. A \sin. b}{\cos. b} \text{ или } \operatorname{tg} u = \cos. A \operatorname{tg} b \text{ и нашедъ уголъ } u,$$

выйдетъ

$$\cos. a = \operatorname{tg} u \cos. b \sin. c + \cos. b \cos. c = \frac{\cos. b \cos. (c-u)}{\cos. u}$$

откуда уже легко найдется сторона a посредствомъ логарисмовъ.

66. Введеніе угла u въ выкладки чрезъ формулу $\operatorname{tg} u = \cos. A \operatorname{tg} b$ дѣлаетъ то, что и другія формулы по логарисмамъ удобно вычислены бытъ могутъ; ибо выйдетъ

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin. A \operatorname{tg} b}{\sin. c - \operatorname{tg} u \cos. c} = \frac{\sin. A \operatorname{tg} b \cos. u}{\sin. (c-u)} = \frac{\operatorname{tg} A \sin. u}{\sin. (c-u)};$$

въ разсужденіи же другаго угла C должно употребить формулу $\sin. C = \frac{\sin. A \sin. c}{\sin. a}$ въ § 41 найденную.

67. Но самое легчайшее средство находить углы В и С слѣдуетъ изъ формулъ въ § 53 и 54 найденныхъ, а именно :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (b - c) \operatorname{cof} \frac{1}{2} A}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (b + c)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C) = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (b - c) \operatorname{cof} \frac{1}{2} A}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (b + c)} ; \text{ ибо нашедъ половику}$$

ихъ суммы вмѣстѣ съ половиною ихъ разности, опредѣлился каждой изъ нихъ особо, а по томъ удобно уже найши можно сторону *a* изъ формулы

$$\operatorname{fin} a = \frac{\operatorname{fin} b \operatorname{fin} A}{\operatorname{fin} B} = \frac{\operatorname{fin} c \operatorname{fin} A}{\operatorname{fin} C} \quad \S 41.$$

68. Въ сферическомъ треугольникѣ даны два угла со стороныго между ними находящеюся ; найти третей уголъ съ двумя сторонами.

Рѣшеніе : Пустьъ будетъ ABC треугольникъ , коего даны два угла А и В и сторона АВ = *c* ; требуется прешій уголъ С и двѣ стороны АС = *b* и ВС = *a*. На сей конецъ изъ § 42 получимъ $\operatorname{cof} C = \operatorname{cof} c \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B - \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B$ а изъ § 44 выйдетъ :

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{fin} c \operatorname{tg} B}{\operatorname{fin} A + \operatorname{cof} c \operatorname{cof} A \operatorname{tg} B} \quad \text{и}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{fin} c \operatorname{tg} A}{\operatorname{fin} B + \operatorname{cof} c \operatorname{cof} B \operatorname{tg} A} ; \text{ или для рѣшенія сея задачи получимъ слѣдующія формулы :}$$

$$\operatorname{cof} C = \operatorname{cof} c \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B - \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B$$

$$\operatorname{cot} a = \frac{\operatorname{cot} A \operatorname{fin} B + \operatorname{cof} c \operatorname{cof} B}{\operatorname{fin} c} \quad \text{и}$$

$$\operatorname{cot} b = \frac{\operatorname{cot} B \operatorname{fin} A + \operatorname{cof} c \operatorname{cof} A}{\operatorname{fin} c}$$

69. Двѣ стороны весьма удобно найдушя изъ формулъ въ § 61 найденныхъ , а именно :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A - B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{cof} \frac{1}{2} (A + B)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (A + B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (A - B)}$$

откуда по логарифмамъ удобно опредѣлишь можно бока *a* и *b*.

70. Нашедъ бока a и b легко опредѣлить можно уголъ C по формулѣ $\sin. C = \frac{\sin. A \sin. c}{\sin. a}$ и $\sin. C = \frac{\sin. B \sin. c}{\sin. b}$.

Можно такъ же опредѣлить $\cos. C$ чрезъ простыя косину-сы слѣдующимъ образомъ : $\cos. C = \frac{1}{4} \cos. (c+A-B) + \frac{1}{4} \cos. (c-A+B) - \frac{1}{4} \cos. (c-A-B) - \frac{1}{4} \cos. (c+A+B) - \frac{1}{2} \cos. (A-B) - \frac{1}{2} \cos. (A+B)$ поступая при семъ случаѣ точно такъ же, какъ мы прежде въ § 64 нашли косинусъ бока a .

71. Въ сферическомъ треугольникѣ даны двѣ стороны съ угломъ между ними несодержащимся, или, то же значить, даны два угла со стороною между ними несодържащеюся, найти протія величины къ сему треугольнику принадлежащя.

Рѣшеніе : Пусть будетъ ABC треугольникъ, коего даны двѣ стороны $BC = a$ и $AC = b$, тогда уголъ B опредѣлишь такъ :

$\sin. B = \frac{\sin. A \sin. b}{\sin. a}$. Во второмъ же случаѣ по даннымъ

угламъ A и B со стороною $BC = a$ найдется бокъ b изъ формулы $\sin. b = \frac{\sin. a \sin. B}{\sin. A}$. По сему въ томъ и другомъ

случаѣ можно почиташъ за извѣстныя какъ двѣ стороны $BC = a$ и $AC = b$, такъ и два угла A и B имѣя противоположащія. И такъ требуется сыскать бокъ $AB = c$ и уголъ C . На сей конецъ изъ § 44 получимъ

$$\sin. a \operatorname{tg} C - \sin. B \operatorname{tg} c = \cos. a \cos. B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c \text{ и}$$

$$\sin. b \operatorname{tg} C - \sin. A \operatorname{tg} c = \cos. b \cos. A \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c.$$

Въ сихъ двухъ уравненіяхъ уничтоживъ какъ $\operatorname{tg} C$ такъ и $\operatorname{tg} c$, выйдетъ

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin. A \sin. a - \sin. B \sin. b}{\sin. A \cos. B \cos. a - \cos. A \sin. B \cos. b} \quad \text{и}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin. A \sin. a - \sin. B \sin. b}{\cos. B \cos. a \sin. b - \cos. A \sin. a \cos. b}$$

къ коимъ должно прибавить еще сіе уравненіе $\sin. A \sin. b = \sin. B \sin. a$.

72. Поелику $\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b$, то получимъ

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \frac{\sin. a^2 - \sin. b^2}{\cos. B \sin. a \cos. a - \cos. A \sin. b \cos. b} \quad \text{и} \\ \operatorname{tg} C &= \frac{\sin. A^2 - \sin. B^2}{\cos. a \sin. B \cos. B - \cos. b \sin. A \cos. A} \end{aligned}$$

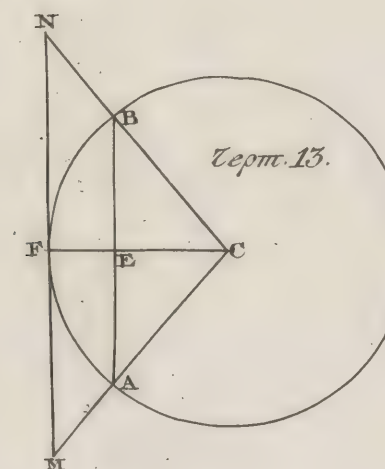
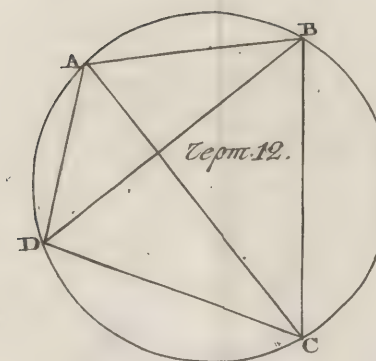
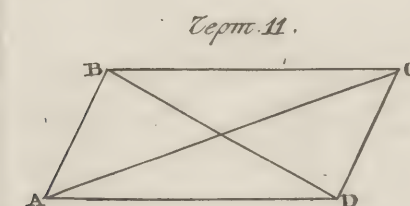
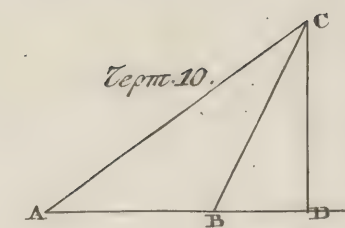
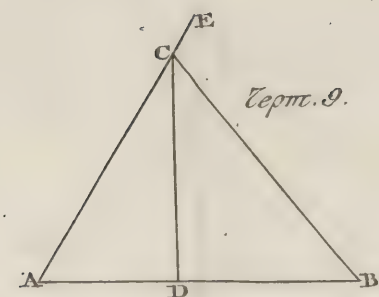
73. Но изъ § 53, 54 и 62 получимъ мы еще другія рѣшенія гораздо способнѣйшія, а именно

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a-b)}{\cos. \frac{1}{2} (a+b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+B)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a-b) \cos. \frac{1}{2} (A+B)}{\cos. \frac{1}{2} (a+b)}$$

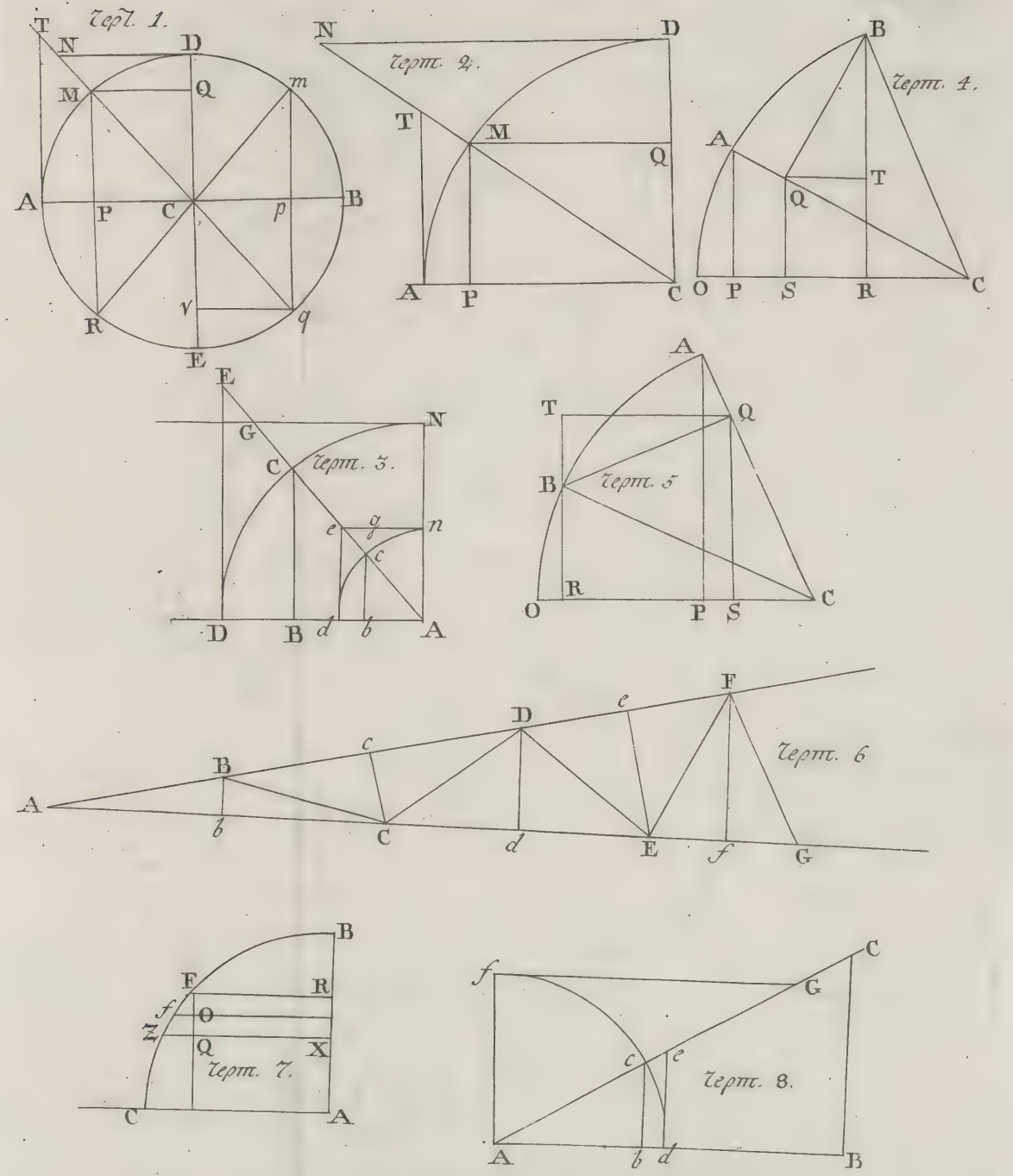
$$\text{или } \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{\sin. \frac{1}{2} (a-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B)}{\sin. \frac{1}{2} (a+b)} \quad \text{такъ же}$$

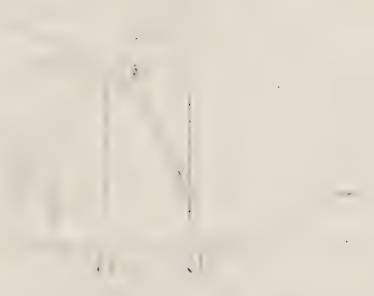
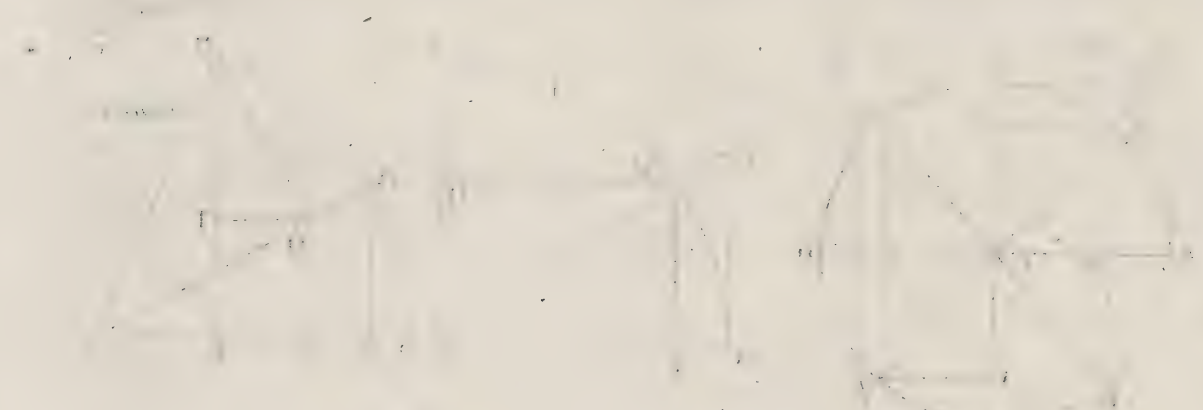
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A+B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a+b)}{\cos. \frac{1}{2} (A-B)} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (A+B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-b)}{\sin. \frac{1}{2} (A-B)}$$

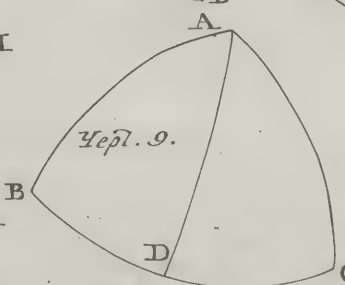
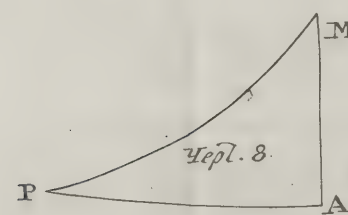
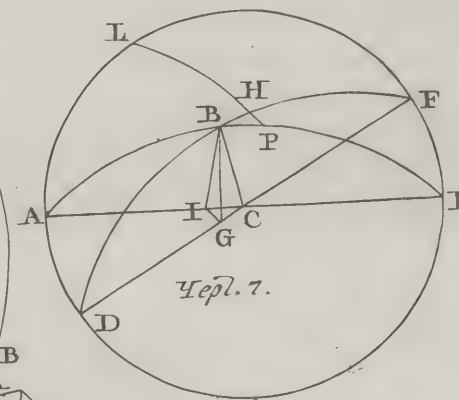
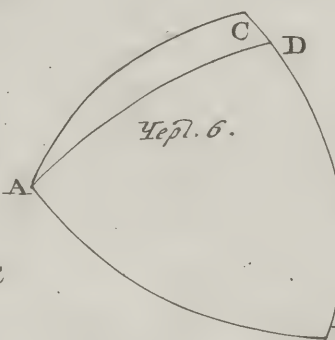
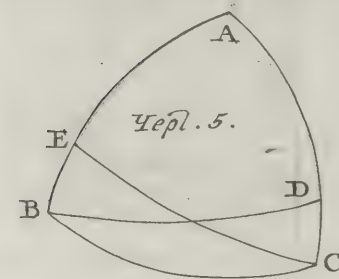
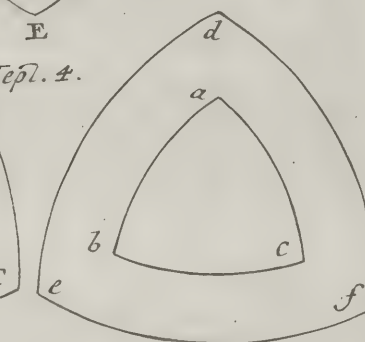
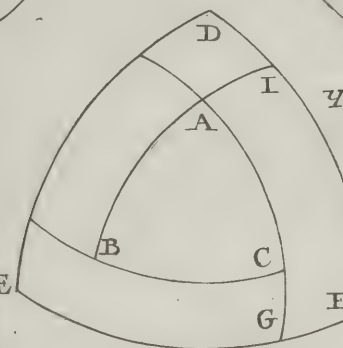
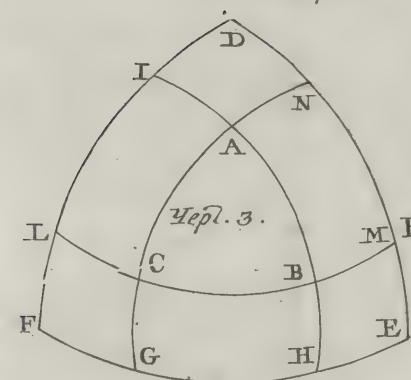
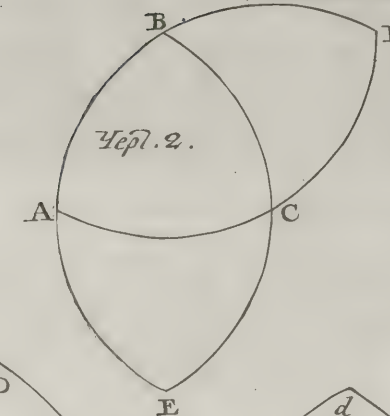
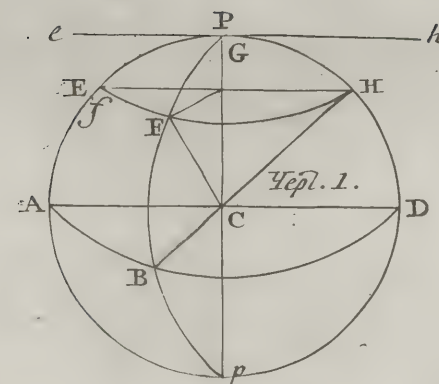
кои формулы по логарифмамъ весьма удобно изчислить можно.







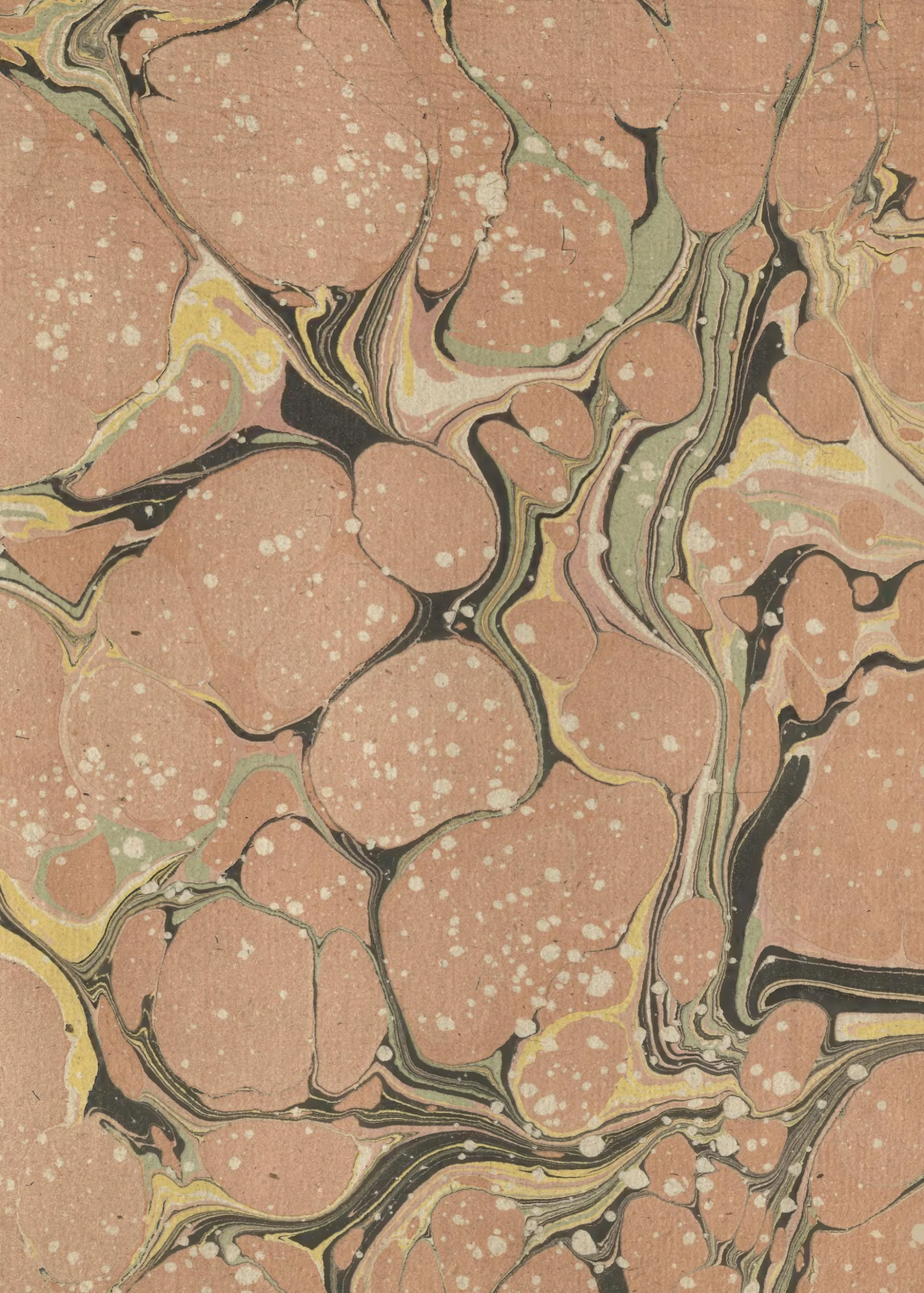


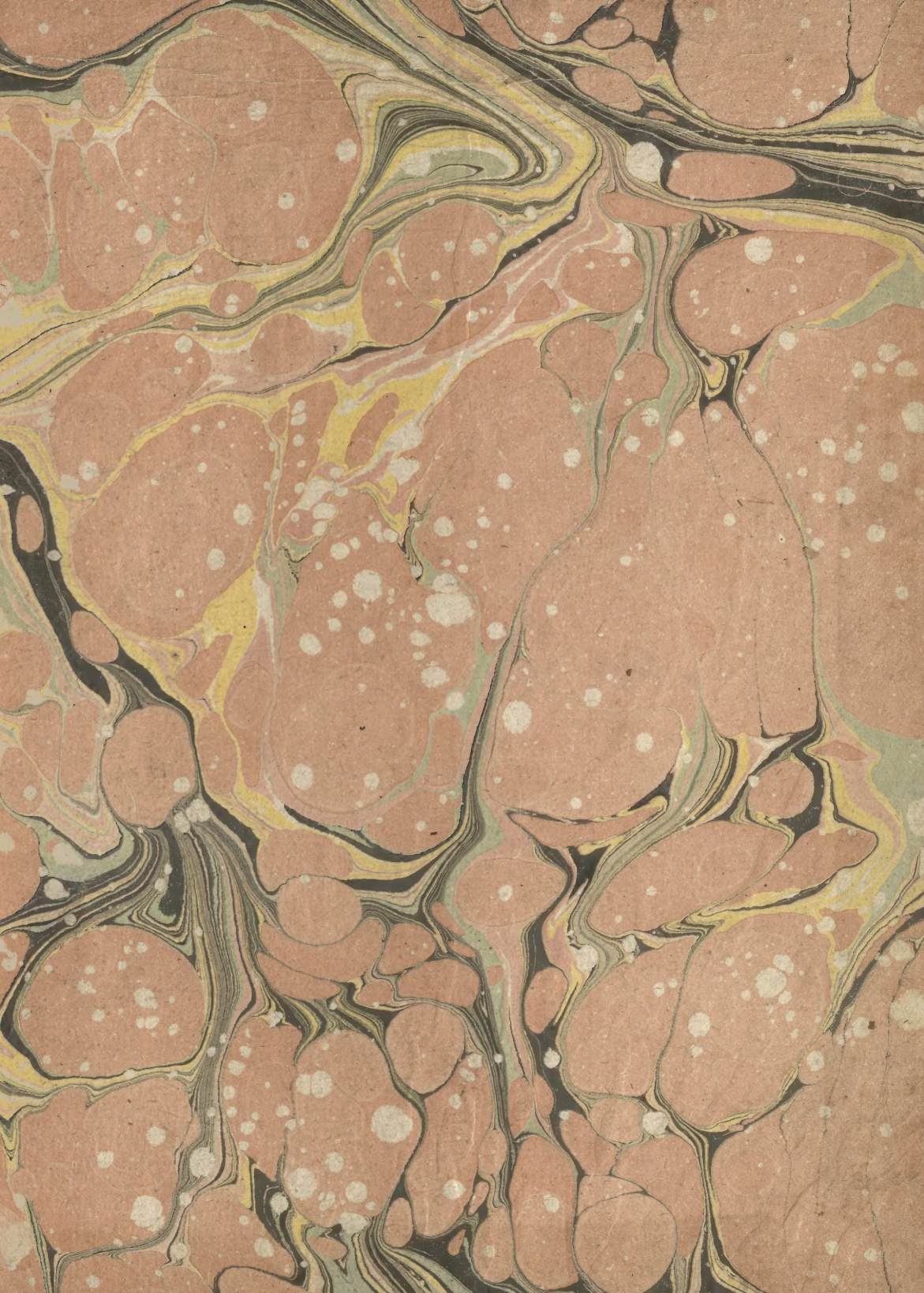






en.





ГПБ Русский фонд

18.68.3.20